(Kern der Metaph. Jan. 1906)

De bestrijding van Hilbert door Poincaré, dat hij eigenlijk inductie toepast, als hij aantoont, dat zijn axioma's niet contradictie~~stellingen~~ ~~[illegible]~~ tot zijn, is niet ~~juist. Hilbert bewijst het voor een eindig bestaan~~ Hilbert gebruikt niet het domein der inductie, maar van een domein eener 2-1-relatie, hoe groot ook. Wat Hilbert bewijst geldt ~~ook~~ niet alleen voor ω, maar ook voor Ƶ (tweede getalklasse). Hij springt niet van een vorige op een volgende; maar van een willekeurig tweetal op een derde.

1.) Wisk. bekijken der wereld. N.B. Het opbouwen, d.i. ontstaan van de verschillende wiskundige gebieden, in één enkel, zelf opgebouwd wisk. systeem.

2.) De wereld wiskundig nabouwen.

3.) De taalparallel van de bouw-pogingen (taak van Wiskunde)

4.) Wisk. bekijken van [illegible] (Peano; axioma's; ook Hilbert.) En als men een taal wisk. bekijkt, ziet hij er niet als een logisch-wiskundige constructie.

5.) opbouwen van [illegible]. daar is noodig het begrip der samengesteldheid, dus inductie (Hilbert.)

6.) Wiskundig zien van de Hilbertsche [illegible] bouw-pogingen, die door de taal van Mengen geleid worden. Bij dit zien is men genoodzaakt [illegible] zelf-nabouwing [illegible] waarin het der nabouwing van 4.

7.) [illegible] Hier is weer noodig het begrip der samengesteldheid, dus inductie. (Hilbert Ges. 7,2 onder II) Woorden als „verschillende"; „wiskunde" worden van elk symbolengroep; die aan axioma's voldoen.

Men zou nog ~~kunnen~~ in [illegible]: de taalparallel van [illegible] 5 (bouw-[illegible] wordt): leer van Wiskunde. Hier komen de woorden „pleonasme" en „infinie"; in 5 waren niets daarvan [illegible] van inductie.

De taal *is* niet logisch, maar een verstandhouding door klanken in grof-materieele dingen, door gewoonte gevormd. Nu ~~heeft op zich hij~~ bestaan er toevallig in de taal niet alleen wiskundige *termen* (b.v. „40"), die in 't dag. leven overal noodig zijn, om de verstandhouding samen te houden, maar ook wisk. redeneeringen in de boeken, die wiskundige bouwpogingen begeleiden, en merken, dat sommige bouwingen *niet* mogelijk zijn. Voor wie nu die taal wiskundig bekijkt, schijnt, dat zij uit axioma's logisch afleidt (wie die taal bekijkt, ziet wiskundige figuren, die hij *logische figuren* noemt) onmogelijkheid van andere relaties. Maar ~~[illegible]~~ de spreker nam geen axioma's aan; hij ging uit van enkele direct te construeeren en te overzien gebouwen, en merkte, dat verdere constructies soms stuiten. De logische figuren komen door de onvolkomenheid der taal, die hare teekenen door spreken moet trachten te verhelpen.

De taal kan zijn allerlei (beschouwen in mijn geval; ik bouw geen systeem op, maar tracht de menschen te suggereeren tot herinnering, die in onderdachtheid vergeten was (ook gebieden) ook o.a. begeleiden hebben zoeken trachten te bouwen voor een stuk werkelijkheid een wisk. systeem[1] (tot verstandhouding en richtlijnen eigen daden) ~~[illegible]~~ hypothesen; ook tellen van een bak erwten.)

(1) redeneeringen, of we wel eenvoudigheid en niet-tegenstrijdigheid hebben.

Maar het is onzin, je eigen (wiskundige) taal te bekijken; dat doe je alleen het ándere, waartegen je vechten moet. En de constructie der taal van ánderen te bekijken, is ook onzin; want ~~zijn taal zijn~~ die constructie heeft met zijn gedachten niet te maken; en is in elk geval juist het gemeenschappelijke (en niet vijandige) ten opz. van jezelf.

Hilbert kan zich dus in Ens. 7,2 nooit aan de inductie ontrukken; maar aan het continuum schijnt het hem gelukt te zijn. (behalve natuurlijk, dat toch elke „zin" weer uit een Existentiebewijs moet blijken.)

De figuren der klassieke logica komen bij den wiskundigen ~~na~~ bouw der wereld voor, echter niet in de eerste plaats; een veel belangrijker rol vervullen zij bij het wiskundig bekijken der taal, n.l. der wiskundige taal.

[(1) $\int dO$ of $\iint f\left(\begin{smallmatrix}x,y,z\\ p,q\end{smallmatrix}\right) dO$. of $\iint f\left(\begin{smallmatrix}x\,y\,z\\ p\,q\end{smallmatrix}\right) dx\,dy$.

Als min. eigenschap voor het pl. vlak door 3 punten zou b.v. te nemen zijn: het minimum oppervlak(1) binnen een convexe (een invariante eig. v.d. kromme) kromme door de 3 punten.

Zijn dan bij de ~~minimum~~ geometrieën van Hamel misschien de platte vlakken ook van zelf minimum-oppervlakken?]

Een krommenbundel heeft altijd een karakt. diff. vgl., is dus ook altijd als opl. van een variatieprobleem te beschouwen.

[De wiskunde is niet zoo erg uitgebreid; hoe verder je komt, des te overzichtelijker en beknopter wordt alles]

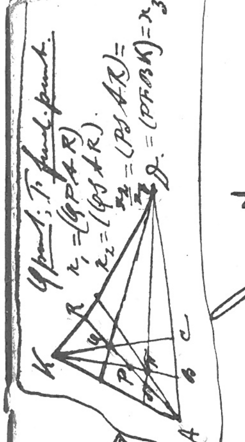
De zuivere uniciteitsopbouw (d.i.: onafh. van differentieerbaarheid) heb ik van de optel. en verm. groep gegeven. Van de complexe groep zal wel lastiger zijn, want die omvat nog meer dan de Hilbertsche planaire bewegingsgroep, waar het al lastig genoeg wordt.

Dus uniciteitsbeh. berusten op differentieerbaarheid; zijn Grundlagen hoeven ~~dus~~ ook voor 't platte vlak ~~niets~~ nog iets nieuws, ~~immers~~ nadat hij te voren ~~heeft hij~~ al een alle groepen v.h. platte vlak opgenoemd heeft; immers hij moest dan toch nog al die groepen op hun realiteits~~voorwaarden~~ gedrag onderzoeken.

~~De proj. groep der lijn is als een eenduidige groep niet ontleden~~

(Eerst is te bewijzen (synth. Ann.), dat geen puntvrije intervallen overblijven.)

(Klein, Math. Enz. I p. 319). Uit de transform. formule $\frac{ax+b}{cx+d}$ volgt, dan hoe elk punt op de lijn als som van andere punten is te beschouwen (vermenigvuldiging). En uit het door projectie



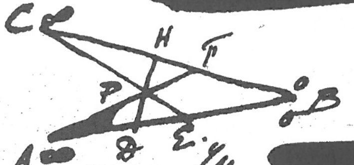
invar. blijven der harmon. betrekking volgt ook vanzelf, dat ~~de getallen ... van ...~~ de dubbelverhoudingen (de „ingevoerde" getallen) onveranderd blijven bij projectie. Deze invariabiliteit der ingevoerde getallen is op zichzelf niet voldoende, om de lineaire vgl. voor de rechte lijn te bewijzen (immers ook elke „functie" van de dubbelverhoudingen blijft bij projectie in„ (dus zou worden alleen kunnen bewijzen: $AFPQ = f(BFPQ, ABPQ)$) variant); men moet er bij nemen de transformatieformule, in den vorm: $\frac{AFPQ}{BFPQ} = ABPQ$.

[waaruit dadelijk bewezen, dat de 3 coör. zoo, dat dan altijd het quotient der beide eerste is (de coörd. op de 3e lijn de a.l. die van die bij de 2 ... ...)]

Dan gaat het echter vanzelf, aldus:

[redacted]

$\mathcal{D}H$ zij de lijn, en we nemen als coördin. de y ~~...~~ van de proj. uit A tusschen C en B en de x van de proj. uit C tusschen A en B.



Dan is [redacted]

$$\frac{y_H}{y_P} = FHCB = \frac{CHFB}{CHFB - 1} = \frac{E\mathcal{D}AB}{E\mathcal{D}AB - 1} = \frac{\frac{x_{\mathcal{D}}}{x_P}}{\frac{x_{\mathcal{D}}}{x_P} - 1}$$

[redacted] [redacted]

Of korter

$$\frac{y_P}{y_H} = HFCB = 1 - HCFB = 1 - \mathcal{D}EAB = 1 - \frac{x_P}{x_{\mathcal{D}}},$$

waarmee de lineaire vgl. voor x_P en y_P is uitgeschreven.

[Projectiviteit met dubbelelementen kan zijn tegengesteld of gelijk gericht (al naarmate de beide segmenten worden verwisseld of niet.) Proj. zonder dubbelelementen is altijd gelijk gericht.]

Oneindig heeft geen anderen wiskundigen zin, dan eindig.

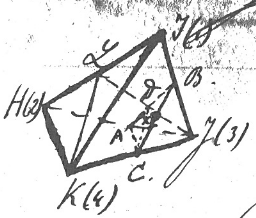
metisch, als w. Spreken we van oneindig klein, dan bedoelen we ~~[illegible]~~ het w^{de} segment van de (tegelijk met de groep) geconstrueerde schaal.

Bij het construeeren van die ~~groep~~ (optelgroep) overigens voer ik alleen voorwaarden voor de groepering; maar weet ik ooit, of ik werkelijk volledig een groep krijg? Ja, want zoodra ik het zou kunnen controleeren met een aftelbaar maf systeem van schalen, ~~[illegible]~~ wordt aan de groepeigenschap voldaan. {Ik weet dat de optelgroep, die uit gaat v.d. üb. dichte deeltal, een groep is; en merk nu, dat ze en andere groep dezelfde construeerde moet hebben.}

Ook voor de R_3 is (nu) licht te bewijzen, dat het platvlak een ~~[illegible] vgl. [illegible] (op vorige pag.)~~

~~Immers [illegible] platte vlak KJL [illegible]~~

~~d. w. z. $\frac{x_1}{x_2} = c$~~



(We dienen vooraf bewezen, dat werkelijk de coördinaten op de zes ribben uit de verhoudingen van 4 getallen, dus uit 3 der zes volgen). Projecteer Punt K in S op LJ en uit L in T op KJ.

Dan volgens vorige pag.: ~~$\left(\frac{x_4}{x_3}\right)$~~ $DSLJ = 1 - \frac{\left(\frac{x_4}{x_3}\right)_P}{\left(\frac{x_4}{x_3}\right)_C}$.

Maar $DSLJ = \frac{\left(\frac{x_2}{x_3}\right)_P}{\left(\frac{x_2}{x_3}\right)_D} = \left(\frac{x_2}{x_3}\right)_P \times \left(\frac{x_3}{x_2}\right)_D$.

Nu hebben we: $\left(\frac{x_3}{x_2}\right)_D = a + b\left(\frac{x_1}{x_2}\right)_D$ (volgens vorige pag.) $= a + b\left(\frac{x_1}{x_2}\right)_P$.

Dus: $\left(\frac{x_2}{x_3}\right)_P \times \left\{a + b\left(\frac{x_1}{x_2}\right)_P\right\} = 1 - \frac{\left(\frac{x_4}{x_3}\right)_P}{\left(\frac{x_4}{x_3}\right)_C} = 1 - c\left(\frac{x_4}{x_3}\right)_P$.

$a\left(\frac{x_2}{x_3}\right)_P + b\left(\frac{x_1}{x_3}\right)_P = 1 - c\left(\frac{x_4}{x_3}\right)_P$ q.e.d.

Van de opvatting der wiskunde als „bouw tot den levensstrijd" is natuurlijk de Kantsche aprioriteit slechts een bijzonder geval.

Wat nog niet gedaan is in de litteratuur, is de Mengentheoretische constructie der „nicht-Pascalsche Geometrie".

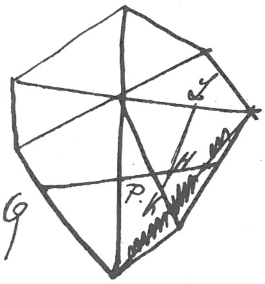
Men kan de Hilbertsche „Grundlagen-Festschrift" beschouwen a het einde van de discussie over den projectieven Tuin. Later, begonnen door Klein in Math. Ann. 6.

En dit geheel is een andere geschiedkundige quaestie, die alleen zoo grooten omvang heeft aangenomen, omdat men de wiskunde axiomatiseerde in plaats van vrij bouwend begon. Men lette op het logisch-abstracte van het bouwen, in plaats van op het bouwen zelf.

Die niet-Pascalsche meetkunde krijgt pas licht, als ze Mengentheoretisch is opgebouwd, maar dan spreken haar wetten ook van zelf; en, zoo min als de quaternionen, heeft ze dan wat aan de axiomatische grondslagenstudies te danken.

~~De Streckenrechnung~~ in Hilbert-Festschrift is niet een van metrische Strecken (van de Eukl. meetk. komt ze er toevallig mee overeen), maar van Würfe. Ze is precies dezelfde als zijne Endenrechnung in Begründung der Bol.-Lob.-Geometrie.

Zo het axioma van Lob. is direct geïmpliceerd, dat de grenspunten van de r. lijnen door O een convex ovaal vormen. Maar dan



kan niet van P Q: P al een grenspunt zijn (binnen het ovaal n.l.) zoodat H een oneigenlijk punt was; immers H ligt op het eigenlijke gebied van de ~~eigenlijke~~ verbindingslijn der zekere eigenlijke punten K en Q.
Hiermee is bewezen, dat een snijpunt van 2 lijnen steeds voor beide tegelijk grenspunt is.

~~Of Verknüpfungsaxiome zonder Anordnungsaxiome bestaan~~ kunnen, wordt nergens onderzocht. (cf. ~~III~~ 55)

[Het bewijs Schoenflies Bericht I (p. 46) is onvolledig ~~[illegible]~~
~~[illegible]~~
~~[illegible]~~

Noemen we E de klasse, waartoe we komen door van uit 1, 2, ... ω telkens de beide Erzeugungsprinzipien toe te passen, en Z de tweede getalklasse, dan wil Schoenflies bewijzen, dat elk getal van Z ook tot E hoort. Hij bewijst echter slechts, dat elk getal van Z, ~~[illegible]~~ (zonder laatste element n.l.) grenselement van een fund. rij van getallen Z is. (maar niet van getallen E; Cantor wou dat laatste ook in de Grundlagen, maar in de Begründung heeft hij zich voorzichtiger uitgedrukt.)

Verder bedenke men, dat men de getallen ψ niet behoeft te kunnen aangeven; zoodat het beschouwde getal niet grenselement van een „eindig aangeefbare" fund. reeks behoeft te zijn, maar in 't algemeen van een oneindig voortloopende.

Maar mijn redeneering gaat niet op; Z kent geen oneindige reeksen; een reeks klimmende termen wordt steeds vervangen door haar grenselement. Ik verklaar dus ook Z: E, en Schoenflies' betoog is goed. (of Hilbert)

De niet-Archimedische reeks van Vahlen is niet perfect, immers niet afgesloten, want de reeks

$0{,}9x + x^2 \quad 0{,}99x + x^2 \quad \text{----} \quad 0{,}999\text{---}x + x^2$

heeft geen grenselement. (vgl. de defin. daarvan Schoenflies Bericht p. 31$^{5}_{4}$)

(Edinburg Review 63 p. 274 r. 11 no) „Mathematics can be applied to objects of experience only in so far as they are measurable; that is, in so far as they come, or are supposed to come", under the categories of extension ~~and number~~."

Uitbreksel rechte lijn als kortste. (met sterker Monotonie-axiom?)

Diff. vgl. $\frac{d^2 q}{dp\,dx} + p\frac{d^2 q}{dp\,dy} - \frac{dq}{dy} = 0$. Stel $g\,dx = f\,ds$.

$$g = \int_c^p\int_c^p W(p, y-px)\,dp\,\underline{\underline{dp}} + \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + p\frac{\partial u}{\partial y}.$$

~~Nu is echter~~ $\int_c^p\int_c^p v(p)\,dp\,dp = \int_c^p (p-\xi)\,v(\xi)\,d\xi$. ~~Stel verder W = w cos² ϑ.~~

(voor y — ϑ cos τ — cos ϑ)

Dan komt: $\int_{\vartheta_0}$ [redacted] $w(\operatorname{tg}$ [redacted] $\tau, y - x\operatorname{tg}\tau)(\operatorname{tg}\vartheta - \operatorname{tg}\tau)\,\underline{\underline{d\tau}} + \frac{\partial u}{\partial x} + \operatorname{tg}\vartheta\frac{\partial u}{\partial y}$.

$g = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta}$ [redacted] $\sin(\vartheta-\tau)\cdot w\,d\tau + \frac{\partial u}{\partial x} + \operatorname{tg}\vartheta\cdot\frac{\partial u}{\partial y}$.

$$f = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta}\sin(\vartheta-\tau)\,w\,d\tau + \frac{\partial u}{\partial x}\cos\vartheta + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\vartheta.$$

Als voorwaarde voor werkelijk minimum komt dan:

w pos. voor alle x, y en ϑ,

en het sterker monodromie axioma geeft:

a) eenduidigheid van w.

b) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2}\int_{\vartheta_0}^{\vartheta_0+\pi} \sin\tau .\, w\, d\tau.$

$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{2}\int_{\vartheta_0}^{\vartheta_0+\pi} \cos\tau .\, w\, d\tau.$

Zoo wordt het boogelement te stellen:

$$\frac{ds}{2}\int_{\vartheta-\pi}^{\vartheta} \sin(\vartheta-\tau)\, w(\operatorname{tg}\tau, y - x\operatorname{tg}\tau)\, d\tau.$$

Stel boogelement alleen afh. van τ, zonder monodromieaxioma,

dan komt [illegible] $\frac{1}{2} = \left\{\int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \sin(\vartheta-\tau)\, w(\tau)\, d\tau + \alpha\cos\vartheta + \beta\sin\vartheta\right\}$

Dus $\frac{d^2(\frac{1}{2})}{d\vartheta^2} + \frac{1}{2} = w(\vartheta) =$ kromtestraal $\times$ pos. factor

De minimumvoorwaarde geeft dus: kromme overal convex.

Hilbert heeft als maat genomen de log D. V. binnen een convexe kromme, en volledig de minimumeigenschap aangetoond. Hamel heeft aangetoond, hoe ze uit de algemeene formule kan worden afgeleid. Hij zocht (diss. p. 24), de functie W zoo te bepalen, dat $\int_{x_1}^{x_2} dx \int_{c}^{p} dp \int^{p} dp\, W + u(x_2, y_2) - u(x_1, y_1) = \lg \frac{(x_1-\nu_1)(x_2-\nu_2)}{(x_2-\nu_1)(x_1-\nu_2)}$, en vindt: $W(p, y-px) = \frac{\partial^2(\nu_2-\nu_1)}{\partial\theta^2}$ (waarvan hij daarbij aantoont, dat W voor ϑ steeds of tusschen $\frac{3}{2}\pi$ en 2π positief is; w is dus in elk geval positief). Verder volgt er als:

$$\lg \frac{x - \nu_2(c, y-cx)}{x - \nu_1(c, y-cx)}$$

Minkowskische maatkunde: $\varphi_{hom}(ds)$

Hilbertsche: $\frac{ds}{s-s_1} + \frac{ds}{s_2-s}$

Neemt men dus als grondopp. de Hilbertsche maatkunde een zeer groot van de vgl. $\varphi_{hom}(s_0) = \text{const.}$, dan komt $ds\, f(\vartheta)$, d.i. de Minkowskische.

De diff. vgl. voor f opdat $\int f$ langs de rechte lijn minimaal worde, is: $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y'} + y'\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial y'}$. Hieraan blijkt geen functie van y' en $y - xy'$ te kunnen voldoen, maar wel een: $\frac{1}{x-\psi}$.

Immers stelt men $f = \frac{1}{\varphi}$, dan komt in φ de diff. vgl.:

$$\varphi\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y'} - y'\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial y'}\right\} + 2\frac{\partial\varphi}{\partial y'}\cdot\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial x} + y'\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right\} = 0.$$

Stel $\varphi = x - \psi$, dan komt in ψ de diff. vgl.:

(1) cf. Hamel diss. p. 24 onder formule.

$$\psi\frac{\partial\psi}{\partial\alpha} = \frac{\partial\psi}{\partial y'} \; (1) \quad (\psi \text{ als functie van } y' \text{ en } y - xy' = \alpha.)$$

met opl. $\psi = f(\alpha + \psi . y')$.

Of als men X en Y neemt de op de lijn (α, y') te kiezen basispunten voor de dubbelverhouding op die lijn:

$$X = f(y - xy' + X . y').$$
$$X = f\{y - y'(x - X)\}.$$
$$X = f(Y),$$

m.a.w. die basispunten liggen op een enkele kromme.

Zijn de imaginaire proj. transformaties (in R_2) niet op een hypersfeer van 4 dimensies te beelden (die dan door 3 punten wordt aangebracht).

Twee polaire oplossingen, die een weinig verschillen, bepalen een volledige rechte lijn; die niets verschillen niets dan zichzelf. (cf. entropievermeerdering bij menging van weinig resp. niets verschillende gassen; groot en klein verschil zijn projectief hetzelfde.)

De getallengeving van Klein komt overeen met de absolute-formule (Lobbes?, Hilbert) van projectieve breuken.

~~Mijn uniciteitsbewijs voor de vermenigvuldiging (p. 76, 77, 78): [illegible]~~

~~[illegible] willekeurige (ook discontinue) stijgende functie [illegible]~~

~~[illegible] waarvan de [illegible]~~

[redacted]

~~A. B. C. D.~~

[redacted] ~~Transform. van A naar C en van B in D~~

~~[illegible] transf. van A naar A en van C in C [illegible]~~

~~[illegible]~~

~~[illegible] A en B, [illegible]~~

~~Opm. 1. [illegible]~~

Du Bois Reymond beweert (M.A. 17), dat de enige (ook bij toelating van discontinuïteit) stijgende functie φ, waarvoor $\varphi(x)+\varphi(y)=\varphi(x+y)$ is: $\varphi(x)=cx$.
Dit volgt direct alleen: uit de stijging volgt, dat we $\varphi(x)$ kennen als een (scheidend) schoolbreukenaantal, en dat komt [illegible] prim. p. 119

(eindige? stijgende) ontegenaftelbare

Een groep [redacted] van het empirisch continuum kan niet discontinu zijn. Bewijs.

We rekenen dan ons continuum zoo, dat op een segment elke ω-puntrij minstens één grenspunt heeft. (Wat geen gelijkwaardig is met het axioom v. Archimedes.)

Dan volgt uit de groep, dat, als men bij dat grenspunt (van een reeds geconstr. schaal) een schaal construeeren (gelijkloopend met de reeds geconstrueerde schaal, waar het grenspunt niet toe behoeft te hooren), dat er een [redacted] (ineens dichte) schaal van grenspunten is te construeeren bij de reeds geconstrueerde schaal. ~~[illegible]~~

der schaal van grenspunten is nu ook een schaal van

~~[illegible]~~

We bewijzen nu, dat die ineens dichte schaal geen vrij interval kan hebben, waarvan de beide uiteinden tot de schaal hooren. 't Natuurlijk niet, want dat interval zou kunnen worden gehalveerd. Maar dan kan ook de oorspr. schaal geen vrij interval hebben.

Het Lüroth-Zeuthensche Bewijs.

A. B. F. H. D. G. K. C. J.

H. A. F. G. harm.

H. A. B. C. kleiner dan harm. Dus D rechts van H.

Maar links van G, immers:

G. A. F. J. harm.

G. A. B. C. > G. A. F. C. > G. A. F. J.

Dus G. A. B. C. grooter dan harm.

Hier is dus bewezen, dat het harmonische net überall dicht (is een transformatie

blijft op de lijn. Maar de proj. Hoofdstelling luidt: Zullen bij ~~steeds~~ harm. elem. steeds weer 4 harm. elem. behooren, dan is die transformatie door die van 3 der punten bepaald.
Klein dacht nu, het Lürothsche bewijs dient aangevuld met het postulaat: „4 opvolgende elementen blijven na de transformatie 4 opvolgende elementen." Alleen zóó dacht hij de transformatie ook voor de irrat. punten te kunnen dwingen. Darboux toonde echter aan, dat dit nieuwe postulaat reeds uit de onvergankelijkheid der harmonieën volgt.

De stelling van de eenduidigheid van het punt door de quadrilatère arith. bepaald, bewijst Klein in een begrensd gebied van den bundel. (En dit uit de stelling voor een puntrij ABC, waar de volgorde der aangegeven is, en gezocht wordt D, het harm. punt van C t.o.v. AB.)

De proj. Hoofdstelling volgt direct, als we met kromme lijnen (waarop we dan buiten de oppervlakten intuitief hebben) werken, en daarop dan volgens Klein de getallen gaan invoeren. Aldus: Vooreerst kan ik ∞ veel Fund. netten aanbrengen, ~~krijg ik~~ en zoo ook ∞ veel grenspunten. Gesteld nu, die lagen niet überall dicht, m.a.w. er waren er vrije intervallen, vrij van grenspunten. Maar zijn P_1, P_2 en P_3

grenspunten in de aangegeven volgorde, en $P_1 P_2$ een vrij interval,
dan is de harmon. toegev. van P_3 t.o.v. P_1 en P_2 (immers ook die t.o.v. twee punten resp. vlak bij P_1 en P_2) weer een grenspunt.

Hilbert laat niet zien, welke geometrieën onafhankelijk van het Stetigkeitsaxioma nog mogelijk zijn; hij geeft alleen een voorbeeld ~~uit~~ van niet-Pascalsche meetkunde. Daarmee wordt dus niet genetisch de bovendrijving v.h. Stetigkeitsaxioma verklaard.

Hilbert (Ens. 7.) mag niet werken met het Existenzbewijs, dat hij geeft, „le nombre „deux"; want hij weet niet, dat zijn systeem iets met het werkelijke getal te maken heeft te [anders althans volmondig vooraf te zeggen: ik veronderstel de wiskunde, en (de taal daarvan) betrek ik wiskundig; maar hoe weet je, dat die taal gehoorzaamt aan wiskundige wetten?; dán moet ik eerst intuitief wiskundig die taal zuiver wiskundig te houden, en als ik achteraf (door het inzicht der inductie b.v.) merk, dat het gaat, kan ik pas beginnen met mijn logisch systeem, dat het moet dekken, maar onafhankelijk weet ik niet, dat dat logisch systeem werkelijk „niet-contradictoir" is.], en dat een contradictie in zijn systeem zich zou moeten dekken met een onmogelijkheid in de reeds bestaande wiskunde.

Pag. 90 postuleert hij (en bewijst niet) contradictoriteit van de „gesloten gekoppelde hoeveelheid."

Ten slotte bewijst hij de niet-contradictoriteit van $\aleph_0$ enz. Waaruit niet volgt, dat die symbolen mathematisch zin hebben, m.a.w. de mathematischheidsvraag mathematisch is op te lossen. (misschien kan hij overigens wel symbolen de niet-contradictoriteit kunnen [illegible] aantoonen, wel ook niets van bewijzen.)

Waren aangetoond de symbolen wel contradictoir, dan hadden ze alleen geen zin als dekking van mathematische taal. Maar daarom konden de intuitieve dingen, die zij bedoelden, misschien toch wel mathematisch bestaan, waar alleen de taal wat onbeholpen is gebruikt.

Dertien als 10 + 3 is een mathem. gebouwtje: ...., dat ons helpt, die laatste groep te beheerschen, en ons er relaties in te herinneren.

Ruimte zelf-contradictoor? Ja, in zoover, dat het op zich zelf niets is, maar de band tusschen buitenwereld en het zich verwerkelijkende subject; dus nooit kan gebruikt worden, om die buitenwereld mathem. te omvatten, nog minder buitenwereld en subject samen.

Naar aanl. van Poincaré: „Valeur de la Science".

Wij bouwen binnen bepaalde grenzen analytische functies, (die natuurlijk elke empirische functie kunnen benaderen) (en maken daarmee het liefst, omdat we daarbij door leidende „voorstellingen", aan de rigide groep (en haar bolstaringen), onze verinnerlijking ontleend, kunnen worden gedragen.); immers we postuleeren de functies der natuur (continu) interpoleerbaar (cf. p. 259[1]). En toch zal het systeem niet altijd precies op die wijze kunnen sluiten; de differentieerbaarheid van alles naar den tijd is wel vol te houden; maar de (statische) evenwichtsfiguren worden bij de limiet (voor een klein rigide deeltje) wel eens niet-differentieerbaar. (Hilbert's drempotentiaal)

1) maar overigens dient opgemerkt dat het toch al bij de een intuitieve weg is, dat interpoleeren, maar is voorbereid dat het vooralsnog niet uit te komen.

De herhaling van feiten scheppen wij; ze is niets anders dan onze intuitieve inductie. Dat wij wetten opmerken, en wij ons daarin verinnerlijken, hangt er mee samen, dat de tijd er eigenlijk niet is. — En dat wij die wel niet direct zien, maar, ons verinnerlijkend, er naar moeten taxeeren, komt van onze afgrenzing.

(P. 243 boven) „Notre espace euclidien a été choisi parmi un certain nombre de types qui préexistent dans notre esprit et qu'on appelle groupes."

(P. 250) Scheidt men zoo een „object" (d.i. een verschijnselcombinatie, welke samendenken gemak geeft) af, dan denkt men dat nu eenig.

(P. 264) Wat hier staat over esthetische emotie, is fout.

40

De toepassing van wiskunde op „contingent matter" (wat dat is het ten slotte, wat Hamilton wil verdedigen) eischt, behalve wiskundige vorming, handigheid en (ruwe) brutaliteit. (van brutaliteit is b.v. de waarsch. rek. een voorb.)

De wiskunde bestaat zoo uit 3 deelen:

1e. Het uitrekenen en contrôleeren (zaken van antwoorden ja of neen). Hiertoe hoort ook de logica. Dit geheele deel heeft

(Edinb. Review 62) zooals Hamilton (1) terecht opmerkt, weinig educationele waard.)

2e. Het inhoudelijk grijpen van nieuwe gebouwen in de zuivere (hierin is uitvinden, dat het grijpen natuurlijk zeker is, zoo min als bouwen natuurlijk is) omdat de structuren zoo vaak zijn.

3e. " " " van wisk. substraten van de natuur en het leven. (bv. physica en magie).

Alle drie (maar vooral het eerste) zijn zeer vatbaar voor nabootsing en herhaling (en zijn zoo vaak voldoende.)

De wiskunde zit in 't afgegrensde intellect; dus wiskundige reactie is nooit spontaan, dus nooit sincere.

Iemand die wisk. werkt, ontkent allerlei doeleinden (ze erkend als relatieven); zijn werk is zelfs, voortdurend op relativiteiten te jagen.

Evenzoo de litterator en kunstenaar.

Toch kunnen zij alleen slechts werken, door een deel hardnekkig blind voor oogen te houden.

De „various grounds of conviction" van Hamilton (l.c. p. 433) in het praktische leven, bedoelen het telkens weer samen-toetsen van fantasieën, of het schijnsysteem niet strijdig is in zichzelf. (Logische contrôle; zij vooronderstelt een alles samenvattend wiskundig systeem, wat fout is). Maar dat is de foute manier; je moet dat onderzoeken door concentreering naar het middelpunt, dus van alle wiskunde. (en uitstraling terug (zoo trachtten mijn redeneeringen te zijn))

Logische contradicties zijn onderscheidingen van verschillende systemen (astronomieën) ~~naar~~ eenzelfde aanschouwing.

Wiskunde op gebied van werkelijk of spiritisme heeft niets met zuiverheid daarop te maken.

Wiskunde gaat vooruit? Natuurlijk schijnt dat zoo, omdat het onderdeel, waarop de aandacht in een zekeren tijd geconcentreerd is, natuurlijk (in ongevallen eenzijdigheid) vooruitgaat.

Iedere ~~natuur~~ vereenvoudiging heeft haar wiskunde: de handel het rekenen, de physica de potentiaal.

~~De~~ vraag: „Is niets herhaalbaar" herhaalbaar? kan niet worden beantwoord, want wil ik dat gaan onderzoeken, dan merk ik, dat ik het antwoord op die vraag noodig zou hebben.

Wat men bedenkt wel; een vraag kan een antwoord: ja eischen of <u>neen</u> of ook ~~zonder~~ den hoorder zonder aandoening van zin laten. En het laatste was bij de vorige vraag het geval. Zoo ook bij de vraag: „Is ita nita?"

Zoo ook de vraag, of iemand, die zegt: „Ik lieg" liegt.
Een vraag waar haar antwoord ~~mag zijn zeggen~~ haar beantwoording niet vooronder„ stellen.

En evenzoo mag ~~het zeggen van~~ bij een samenvatting <u>alle</u> die samenvatting zelf niet mee zijn inbegrepen.

Want zoowel vragen als samenvattingen hebben in de logische taal (d.i. wiskunde) betrekking op het reeds opgebouwde of op wat verondersteld wordt opgebouwd te zijn.

Wij denken de natuur buitenalweg naar wiskundig (d.i. volgens één verwerkelijking) opgebouwd, en ook haar mechanica volgens één verwerkelijking (inertie van spiergevoel en rigide lichamen.)

We zouden de ~~natuur~~ willen vangen, en omdat analytische functies daartoe het hoofdzakelijke middel zijn, hebben we altijd neiging, om ook de evenwichtsfiguren zoo te willen denken.

(1) dus een functie zich in punten vlak bij elkaar analoog moet gedragen, waaruit dan volgt het bestaan van $\partial y, \partial^2 y, \partial^3 y$, enz.

21 (hierbij misschien geleid door een idee, dat de ruimte een absolute maat is,(1) en een soort Ausgleichung dus altijd moet teruggaan tot een evenwichts-toestand, die analytisch is.

Maar nu blijkt nu dat niet altijd te (bij een willekeurig gekozen dichtheidshypothese) kunnen volhouden; zoo bij de niet-differentieerbare potentiaal van Hilbert.

En bij het vangen van de natuur door kleine rigide deeltjes (wat ook een zeer „bewijste" methode is), zal ook niet altijd de limiet der mathematiseering een analytische functie geven.

(Poincaré) Heb je eenmaal, dat de functies der natuur eenige malen differentieerbaar zijn, dan kun je de betrekkingen door invoering van nieuwe variabelen altijd tot diff. vgl. der 2de orde terugbrengen. („inertiebeginsel.")

Het Hegelianisme heeft in zijn eenheid van tegendeelen alleen betrekking op de applicabaarheid der taal (d.i. wiskunde) op de werkelijkheid, niet op de werkelijkheid zelf, of de wiskundig geziene werkelijkheid zelf.

Het reageeren op de natuur, door haar wiskundig abstract te zien, lijdt natuurlijk aan al de nadeelen der doel-middel-practizeering.

De uitbreiding der wiskunde maakt haar aanraking met het leven (b.v. dienstbaarheid als medium tusschen actiepositief en reactiepositief) natuurlijk ook hoe langer hoe uitgebreider.

(a) immers afgezonderd ligt de functie van wiskundige grondslag te kunnen opgeven; „Zoo is het.

De praktijk van een universiteitsfaculteit (geleerden beroep (a)) is de daad der toepassing van de wiskunde op een levensdeel. Die praktijk wordt echter aangevallen door de Herinnering van de daad naar het centrum (Zoo goed als in een monographie over of kunst ook het drijvend centrum in de herinnering dient behandeld.)

~~Veronese~~ begripsbepaling „intuitieve opbouw" geheel fout in dezen zin, dat hij ook over „denken" en „in den Gedanken entsprechen" spreekt; welke dingen geheel buiten de wiskunde hooren te blijven.

Zeg ik b.v. „ik herinner mij dit" (vraag of iets waar), dan heeft dat alleen zin als een wiskundige uitspraak (zeker of onzeker) over het mechanisch wereldsysteem in den tijd.

Die waan, om (wiskundig) te denken over „zichzelf" of „eigen herinnering" is de grond van alle philos. verwarring.

(Goethe an Eckermann) „Mehr darf man sich in Schriften auszusprechen kaum anmassen."

De philosophische speculatiën mogen dat alleen zijn, om steeds grooter centraliseerend kennis-systeem in de strijdverinnerlijkheid der menschen te brengen: niet, om een kennis-systeem onafhankelijk van dien strijd te willen opbouwen, dat dan later alleen misschien op dien strijd zou kunnen worden „toegepast."

Een vermenigvuldig-groep (voor) is dat (ook) voor x^k, laat zich dus combineeren met elke groep $x'^k = x^k + c$. (c de parameter.). Laten we thans van die laatste groep zich misschien niet de vermenigvuldig-groep tot een drieledige combineeren? Ja, als $k_1 = -k_2$, n.l. tot de projectieve groep. We stellen dan $k_1 = 1$; $k_2 = -1$.
En elk der 3 eenledige groepen geeft een der infinit. transf. der proj. groep.

Differentieerbare functies zou men kunnen kenschetsen door te eischen, dat in 't oneindig kleine de projectieve meetkunde geldt.

Axioma's, die niet meer mogen bevatten, dan de ervaring? Och, dat kan nooit, we vullen altijd de ervaring aan, wat leert de ervaring b.v. over het oneindig kleine? Het blijft altijd een toeval, dat de ons aanvallende hypothesen werkelijk in de empirie uitkomen.

Zoo heeft Klein ongelijk, als hij zegt, dat Lie zich tot analytische functies mocht beperken, omdat elke kromme met voldoende benadering door een analytische functie kan worden voorgesteld. Het zou best mogelijk zijn, dat er niet-analytische (niet-Kleinsche) groepen bestonden zóó, dat de ze benaderende analytische transformaties geen groep vormden. (Al vormden ze dan ook „bijna" een groep, „naderden" ze tot de groepeigenschap.) Neen, de eenige rationale empirische grond voor de meetkunde, is en blijft het waargenomen rechthoekig Cartesiaansch coördinatenstelsel, met de invariant x^2+y^2.

Bij de niet-Pascalsche projectieve meetkunde kan ik niet zeggen $\varphi_1 - \varphi_2$ verhouden zich als $\varphi_1 a - \varphi_2 a$ (wel als $a\varphi_1 - a\varphi_2$); vermenigvuldig ik m.a.w. de eenheden op de schalen der fundamentaalpunten elk met eenzelfde getal, dan krijgen de punten met gegeven coördinaatgetallen een andere coördinaatverhouding.

Te onderzoeken, wat, voor niet-Pascalsche getallen wordt van de projectieve groep, die een reciprociteit (polairsysteem) invariant laat. (Dit is noodig voor goed verstaan der Vahlen'sche niet-Euclidische affiniteit.)

Het continuum als „oneindig voortloopende kansen", zij is onzin, want als „oneindig voortloopende kansen" Dan krijg ik alleen 2^ω, nooit $2^{\aleph_0}$.

Men zou kunnen zeggen: Is het niet te maken, of een puntrij op het continuum dicht is, of niet? M.a.w. is het karakter van den boomtak altijd uit te maken? In elk geval kan ik zeggen: heb ik het nog niet uitgemaakt, dan kan ik de completeering tot continuum zeker niet toepassen, noch dus zeker tot een aftelbare hoeveelheid beperkt blijven.

Niet-uniforme groepen op de rechte lijn zouden zijn af te leiden uit uniforme groepen in het platte vlak door Riemannsche afbeelding.

Het opbouwen van de rij één, twee, drie ——— uit de oer-intuitie, gebeurt aldus:

(0) 1e. één - twee (geschiedt door tijdsverloop)

(0) 2e. twee - drie (geschiedt door tijdsverloop)

Deze rij wordt en toegepast bij het tellen van punten, door middel van de oer-intuitie:

(0) 1e. één - gezichtswaarneming van een (enkel) punt.

(0) 2e. twee - een " " " (tweede) " .

„Continuum-intuitie" sive „breuken-intuitie".

<u>Te bewijzen</u>: Er is geen functie, op gesloten opp. en [illegible] 0, [illegible] nergens divergentie.

Die functie zou dus alleen div. hebben in 't eindige binnen een zeker gebied; maar uit zulke divergenties is een functie op te bouwen, in 't oneindige van orde $\frac{1}{r}$. Was er nu ook nog een van lager orde in 't oneindige, dan zou hun verschil zonder divergentie zijn, en in 't oneindige 0. Blijft dus

Te bewijzen. Er is geen functie in 't oneind. 0 met nergens divergentie.

Dit volgt uit de opsplitsing in elementairvelden van de gradient. die gradient ~~wordt~~ (is een vectordistrib.) in 't oneind. 0; daaruit volgt dat zoowel de rot. als de div. in 't oneind. geen krachtwerking in 't eindige geven, ~~dus~~ en daar die gradient) geen verdere rot. en div. heeft, is die gradient in 't eindige overal 0. Dus de pot. een constante, maar daar ze in 't oneind. 0 is, is ze overal 0.

Dat velden zonder rot. en div. slechts kunnen zijn sommen van reeksen van (inwendige) bolfuncties, volgt dan in verband hiermit: dat velden met slechts een enkel punt, waar div. in mag voorkomen en die in 't oneindige een constante potentiaal hebben ~~slechts kunnen~~ zijn sommen van reeksen van inwendige bolfuncties om dat punt.

Als men wiskundige stellingen bezigt over een willekeurig punt of een willekeurig getal, dan denkt men feitelijk het willekeurige punt veranderlijk en achtereenvolgens alle waarden van zijn gebied doorloopend, terwijl de demonstratie voor al die waarden (hetzij continu, hetzij discontinu verloopend) geldig blijft.

Russell – Poincaré. (Rev. d. M. 1906, 5 en 6). Russell gooit de logische bestaansbewijzen van het transfiniete (die bij Burali-Forti b.v. tot contradictie voerden) weg, maar behoudt de (kwasi-)intuitieve opbouw van Cantor zelf bij; en maakt er de fouten van Cantor weer opnieuw. Poincaré wil echter ten onrechte niet alleen de logische, maar ook alle Cantorsche intuitieve bestaansbewijzen wegdoen.

Van de uitbreiding der vgl. van Legendre, die men krijgt door de vgl. van Laplace op niet-Euclidische ruimten uit te breiden vindt men de oplossing, door de potentialen van niet-Euclidische magneten van verschillende orde uit te rekenen (analoog met de Maxwellsche afleiding der bolfuncties voor de Euclidische ruimte.)

N.B. de prijsvraag Jablonowski voor 1920. (zie Math. Ann.)

Het zijn van de wiskunde is geen vak; wel de haar toepassende doel-middel-parteering. Maar de maatschappelijke beoefening der wiskunde is een opgeofferd zijn aan en dienen van anderen, die op je parasiteeren.

Dat de ruimte voor ons leeft, wil zeggen, dat onze spierbewegingen ~~..~~ zoo levend zijn.

De reeks ω is alleen op te bouwen op de continue tijdsintuitie.

Verstandhouding: Met één woord rijst een geheel gebouw met al zijn ondergebouwen, en als gevolg daarvan een heel en geheel (wiskundig samengevallen) reeks van gedragsregels (op grond van doel-middel-) Zoo'n door inductie saamgehouden stel volgreeksen voor elk der individuen berust op terugvoering daarvan op het (trouwens ook uit het hoofd geleerde) inductiegebied der hoofdbewerkingen met getallen.

ag'l
Zouden de afwijkingen van de wet van Boyle niet zijn te verklaren uit de elliptische ruimteconstante?

Vahlen definiert stetig aldus: „zu jedem Aggregat von vor's und nach's existiert wenigstens ein Punkt." Dit jeder heeft alleen zin voor opgebouwde hoeveelheden, en opgebouwde Aggregate.

(Vahlen Abstr. Geom. § 10) Zoo'n stel betrekkingen is alleen met behulp van fundamentaal-rijen aan te geven.

Men kan van een mathematische contradictie of onmogelijkheid van inpassing alleen spreken, zoo gevraagd wordt een wiskundig opbouwbare verzameling, het voorwaardensysteem waarvoor is te splitsen in elementen, elk voor zich mogelijk, maar te samen niet. Maar is die splitsing niet mogelijk, dan heeft de stelling geen zin, en bestaat noch het principe van contradictie noch tertii exclusi. (Overigens geldt het laatste principe ook niet altijd, als de splitsing wel mogelijk is;
(immers de verzameling is dan nog niet altijd af te bouwen; dat gaat alleen dan met behulp van volledige inductie.

Dat het geoorloofd is, de vol. distr. van een flux in ^nR_m te splitsen in de ~~rotatiebuizen~~ rotatie-'bollen' om de gesloten flux-buizen, blijkt als we de R_n verdeelen in lang-dunne (lengte afm. $\infty \times$ dikteafm.) vol. elementjes langs de flux-lijnen. Maak nu maar op de integraal langs een willekeurig ²oppervlak door een kromme begrensd, dan komt op beide manieren uit de rotatie-planivector over het opp. de integraal v.d. flux langs de kromme.

Zijn er ∞ veel cijfers 4 in de ontwikkeling van π?
Is een eindig aantal contradictoor, dan zijn dus alle stellen van een eindig aantal cijfers 4 met tusschen elke twee een eindig aantal andere cijfers contradictoor. D.i. onmogelijkheid van elk eindig aantal cijfers 4 bewijst zoo ongeveer het oneindige aantal.
Is een oneindig aantal contradictoor, dan hebben we een eindig? Althans we kunnen dat dan niet aannemen zonder gevaar voor contradictie, want kwam er een, dan hadden we een oneindig, het oneindige aantal zou dus niet contradictoor kunnen zijn.

Of eigenlijk is de voorgaande redeneering niet geheel zuiver. Immers de contradictoriteit van „eindig" bewijst onmogelijkheid van 4 → ω maal „niet-4", ook van 4 → eindig maal „niet-4" → 4 → ω maal „n-4" ~~maar~~ en besluit daaruit tot 4 → eindig maal „niet-4" → 4 → eindig m. „n-4" → 4 → ...
Maar dat berust juist op het pr. tert. excl., dat geen derde erkent naast 4 → ω maal „n-4" en 4 → eindig maal „n-4" → 4 → ...

Maar we kunnen aldus bewijzen, dat toepassing van het pr. t. e. nooit tot contradictie kan voeren.
~~Immers~~ contradictoriteit van oneindig maal 4 (d.w.z. van afwezigheid van het laatste 4 cijfer (niet eigen gekend-kunnend-zijn van) ~~[illegible]~~ (achter elkaar) „ω maal niet-4", en contradictoriteit van eindig maal 4 niet eigen contradictoriteit van „ω ~~maal~~ (achter elkaar) niet-4". Beide contradictoriteiten kunnen niet samengaan.

De eigenlijke wiskunde werkt met ω, heeft dus haar essentie ~~alleen~~ buiten de toepassingen.

De theorie der eindige groepen heeft alleen daarom belang, omdat ze op eindige verzamelingen (algebraische vergelijkingen) kan worden toegepast.

Wiskunde kan beoefend worden in Verarming en in Bezitting des Willens. Eigenaardig, dat alleen de eerste de taal voortbrengt.

De onverbiddelijkheid van de wiskunde is onze kracht; die van de werkelijkheid de kracht van het andere.

Een willekeurig getal der tweede getalklasse kan ik alleen denken, omdat ik het afbeeld op ω, en als zoodanig denk ik het ~~ook~~.

In „Over de structuur der perf. puntverz." II eerst ingaan op Baire (Fonct. disc. p. 101–105, dat wel het afspl. proces volgt en feitelijk van Ω onafh. is; het volgt ook voor het hoofdtheorema dez. grondgedachte als ik, is alleen noodeloos wijdloopig, doordat niet ~~dadelijk~~ met de afsplitsingsproced., doch met de resten wordt gewerkt), Mahlo (Leipz. Ber., 09) en Denjoy (C.R., 09). Dan het vlak in ∞ geb. ~~met~~ gemeensch. grens verdeelen; ~~bewijzen~~ de condities van § 3 (Schoenfl. II Kap. V) en de structuur der kurvenbogen.
Daarna „Over transform. van opperwl." III.

(Fig. 2 van) In „ het Analysis Situs" stellen op een horizontale eenheidslijn de zwarte banden voor de duale getallen, en een ruggegraat wordt bepaald door een irrationaal (d.w.z. niet duaal) getal, en de spiegelingen daarvan t.o.v. de duale getallen. In het bijzonder de roode band door de versch. getallen, die in het duale stelsel eindigen op 0X.

Twee punten (van de horiz. eenheidslijn) van fig. 2 kunnen dan continu worden verbonden door een deel van de kromme, als van de bijbehoorende getallen het verschil of de som een duaal getal is.

IX—A

Physica is bestudering van causale reeksen in de vaste lichamen. Wat ligt dus meer voor de hand, dan de ingewikkelde onder die reeksen in inductief verband te brengen met de eenvoudige, n.l. de rigide dynamica? Nu, en anders is de mechanische physica niet.

Dr. M. P. M. MOESMAN,
ARTS,
Overtoom 251,
AMSTERDAM.

L. S.

Verleden week heb ik een recept voorgeschreven voor Mej. Brouwer, door Dr Gantvoort geparafeerd. Zij is lid van 't Ziekenfonds Rotterdam en ik geef u in overweging dit voorschrift af te leveren.

Met hoogacht. achtd

Dr Moesman

25.2.7.

IX–B

Hamilton – Whewell.

[illegible] [illegible] & [illegible] [illegible]

citaat [illegible]

p. 450 [illegible]

[illegible]

451 the schoolman [illegible] [illegible] vergelijken, [illegible] [illegible] altijd [illegible] nuttig. [illegible] niets dat van een bijzondere [illegible] precies [illegible] te passen. ([illegible] Gottes [illegible] aanleiding [illegible])

p. 453 citaat [illegible] [illegible] [illegible]

p. 454 Citaat [illegible]

[illegible]

WED. C. A. J. DE GOEY-BLOM,

Voorheen Filiaal „De Woning" en
Plateelbakkerij Zuid-Holland .. ..
STATIONSTRAAT 15a.

HILVERSUM, ... 190
TELEF. 466.

REKENING

voor de WEd: Heer Brouwer
Blaricum

1906		Zegel		~~0 05~~
Aug	16	zes lampenglazen à 0.35		2.10

Stelling 1. Een R_p in R_n kan altijd worden uitgebreid tot een R_q in die R_n. ($p < q < n$.)

Stelling 2. Een R_n is in zichzelf af te beelden (een-eenduidig en continu), waarbij een bepaalde R_p kan geschoven worden over te gaan in een bepaalde andere R_p. ($p < n$.)

Stelling 3. (volgt uit 1 en 2). Twee R_p's in R_n ($p \leqq n$) kunnen in een bepaalde puntcorrespondentie in elkaar worden overgevoerd zóó, dat alle punten der R_p langs een enkelen ~~parameter-enkelvoudige krommen~~ [overgang met vaste grenzen ...] lijnen beschrijven.

Stelling 3a. en, is de grootste [illegible] - verrukking van R_p naar R_p ε, zich bij een stelsel van w.z. van R_p's tot ϱ_p, dan kan ik de elementen (d.w.z. hoekpunten, ribben, zijruimten) van een maatnet in R_p laten benaderen door maatnetten, telkens een in elk der R_p's.

Stelling 4. Wordt een R_n geheel gevuld met een afgesloten, dus perfecte verzameling van R_p's, dan kunnen die R_p's genomen worden als parallellen aan coördinaatruimten bij zeker coördinatenstelsel.

Stelling 5. Laat een systeem van R_p's in R_n zich bieenvormig en continu laten afbeelden op een R_m, dan vormt dat systeem een R_{p+m}, en dus volgens stelling 4 zijn daarin de R_p's parallellen aan coördinaatruimten bij zeker coördinatenstelsel.

en wel voor afstand ε van R tot ϱ is de te vinden afstand der elementen: [illegible] uitbreiding v. ε.

Bewijs van stelling 4.

Trek een willekeurige kromme en zet daar langs de R_p's (na eventuele uitschakeling der overtollige stukken). We gaan bewijzen, dat we zoo een R_{p+1} krijgen, waarin de genoemde R_p's-krommen worden genomen als parallellen aan coördinaatruimten.

Neem daartoe twee die R_p's, α en β zóó, dat afst. $\alpha\beta = \varepsilon_0$. Beeld α en β op elkaar af, en verbind ze door een ε_1-ketting van R_p's, d.w.z. alle overeenkomstige punten hebben afstanden $\leqq f(\varepsilon_0)$ van elkaar, waarin f met ε_0 verdwijnt, en alle overeenkomstige opvolgende punten hebben afstanden $\leqq \varepsilon_1$. We doen dat als volgt: We voegen tusschen α en β een reeks R_p's in zóó, dat elke volgende zich op de voorgaande laat afbeelden met afstanden $< \frac{1}{2}\varepsilon_1$ tusschen de overeenk. punten. Dat dit kan, volgt uit stelling 3a. Op elk van die R_p's zetten we een afbeelding van α en β zóó, dat elk punt van het overeenk. punt in α en β een afstand $\leqq \varphi(\varepsilon_0)$ heeft, waarin φ met ε_0 verdwijnt. Dan hebben alle overeenk. punten in die R_p's van elkander een afstand $\leqq 2\varphi(\varepsilon_0)$. Zij γ de eerste R_p, die volgt op α. Op γ hebben we nu zijn eigen afbeelding en een met afstanden $\leqq \varepsilon_1$ van de overeenk. punten op α. Die beide zijn continu in elkaar over te voeren, dus ook (in m tusschenstanden) met onderl. afst. van opvolgende overeenk. punten $\leqq \frac{1}{2}\varepsilon_1$. Neem nu (in de rij der R_p's) $m+1$ R_p's aan, die zich op γ laten afbeelden met onderl. afstanden van overeenk. punten $\leqq \frac{1}{4}\varepsilon_1$. Beeld dan daarop op die wijze naar volgorde af de $m+1$ afbeeldingen, die we op γ, buiten haar eigen afbeelding hadden geconstrueerd. De ε_1 ketting loopt dan van α naar γ, over die $m+1$ tusschen-R_p's, en zoo voort naar $\ldots$ Tusschen de ε_1-ketting voegen we tusschen elke twee schakels een $\frac{\varepsilon_1}{2}$-ketting in, ε_2 b.v. $= \frac{1}{1000}\varepsilon_1$, daartusschen een ε_3-ketting ($\varepsilon_3 = \frac{1}{1000}\frac{\varepsilon_2}{2}$) enz. Zoo krijgen we een R_{p+1}. — Zet langs een tweede kromme ook de R_p's uit, dan krijgen we een tweede R_{p+1}. Trek in beide een kromme, die uit elk der R_p's slechts één punt bevat. En leg tusschen die beide krommen (α en β) een [illegible] R_2, die geen verdere punten met de R_{p+1}'s gemeen heeft. Trek dan tusschen α en β krommen met onderl. opvolgende afstanden $< \varepsilon$ zóó, dat de R_{p+1}'s er door geheel buiten elkaar liggen. Dit kunnen we doen, door de eerste kromme δ op voldoenden afstand van α.

(d.w.z. ieder punt van α heeft minstens één punt van β, dat op afst. $\leqq \varepsilon_0$ er van is verwijderd.)

Zie echter beneden.

(evenmin als de volgende tusschenkromme δ enz.)

Deze kan noch de R_{p+1} van α noch die van β raken; Maar de R_{p+1} van γ kan nu verder punten van de R_2 bevatten. Construeeren we de op of rechts van de volgende kromme δ liggende stukken daarvan approximeerende veelhoeken in afst. η ~~...~~ $(\leqq \varepsilon)$, maar alleen voor die stukken, wier approximeeringen bij onbepaalde afname van η niet eenmaal geheel rechts van δ zouden komen te liggen. Deze approximeeringen loopen telkens van een punt van δ naar een ander punt van δ, en we vervangen de tusschenliggende stukken van δ door de overeenk. stukken der approximeering, en krijgen zoo in pl. van δ: δ'. Voor de nu volgende kromme ζ moeten we letten op de stukken van de R_{p+1}'s van γ en δ' die er op of rechts er van vallen. Maar overigens gaat het op dezelfde manier. Zet nu op al die krommen een ε_1-ketting als boven beschreven, en laten de punten daarvan in R_2 overeenk. punten zijn op α, γ, δ' —— β van een $(\varepsilon, \varepsilon_1)$-net in de R_2. Behalve de eigen ketting op γ, kunnen we er zetten een $(\varepsilon_1 + 2\varepsilon)$-ketting, door in elk punt een zoo nabij mogelijke afbeelding van de R_p van het overeenk. punt van α te zetten. Verbindt de overeenk. punten der beide kettingen in γ door ε-kettingen met ~~...~~ n schakels elk. Dan komen tusschen de beide kettingen van γ als overgangskettingen n tusschenkettingen, maar in 't algemeen met grooter schakels dan ε_1 en ook niet $= f(\varepsilon_1)$ (daar voor alle n echter dezelfde en voor alle voldoend aantal punten op γ in te schakelen zijn al die tusschenkettingen tot ε_1-kettingen te maken.) Analoog brengen we in γ den overgang van de eigen ketting naar de op γ uit de [redacted] ketting van α afgeleide, wier overeenk. punten den ε-afstand behouden. Immers het komt hier eenvoudig feitelijk ~~...~~ nog maar aan op het construeeren van twee ε_1-kettingen, in dezelfde R_p ~~tusschen~~ die onderling den ε-afstand van elkaar hebben, en wier overeenk. punten dat ook moeten houden. Zorgen we nu in den eigen ketting overal de noodige tusschenpunten aan te brengen "zoo", dat met die tusschenpunten de $(\varepsilon, \varepsilon_1)$-netovergang naar beide nevenkettingen in γ mogelijk is. Analoog als voor γ, de tweede kromme in R_2, brengen we tusschenpunten in de vierde, zesde enz. kromme in R_2, en ten slotte voegen we nu in alle ~~kettingen~~ krommen in R_p (d.w.z. α, γ, δ' —— β) het maximum-tusschenpunten overal in, dat tusschen twee daarvan overeenk. punten maar op een der krommen noodig is geweest. Zoo komt een $(\varepsilon, \varepsilon_1)$-net van afbeeldingen der R_p's op de R_2. (Wat het is niet noodig meer te herinneren, hoe de bijkettingen, die naast de eigen kettingen op γ resp. een ander der krommen voorkomen, worden neergelaatst elk op een verschillende voldoende vlak ~~naast~~ dezelfde kromme.) Binnen elke maas van het $(\varepsilon, \varepsilon_1)$-net zetten we analoog een $(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$-net ($\varepsilon_2 = \frac{1}{1000}\varepsilon$; $\varepsilon_3 = \frac{1}{1000}\varepsilon_1$) enz. Zoo krijgen we een uit R_p's gevormde R_{p+2}. —— Nu moet uit de R_2 en R_3 en dan uit de R_{p+2} en de R_3 een R_{p+3} worden gevormd. Het laatste gaat gemakkelijk analoog aan zooeven, als eerst maar de R_3 is gevormd. Maar het laatste bewaar volgens de vorige methode; want de overstekende stukken van de γ in R_3 kunnen een alle mogelijke Riemannsche samenhang hebben, en zijn daar niet door een δ' op afst. ε te vervangen zoo, dat δ' een gewone enkelv. samenhangende R_2 blijft. Maar reeds de methode om R_2 te vormen was niet juist. Immers kan daar, als men de krommenreeks overal dicht maakt, ~~op vooraf vastgestelde kromme~~ om bepaalde nadering krijgen van punten in R_2, terwijl de bijbehoorende krommen elkaar in hun rij niet onbepaald naderen. Daarvoor moet dus reeds voor R_2 een betere methode worden gezocht.

IX–E

~~[illegible]~~

De stelling van het uitgesloten midden.

Empirisch: Een roos is rood of niet rood; d.w.z. bij het bekijken der roos is het al of niet mogelijk een wiskundig systeem te projecteeren, dat aan de andere (in de wereld) reeds gebruikelijke systeem gebonden is door bepaald analoge betrekkingen van „roos" ~~of~~ en „rood".

of althans ingewikkelder systeem

Dit zijn in de empirie (d.w.z. bij empirisch uit te maken oordeelen) echter slechts wiskundige systemen ~~[illegible]~~ van enkele (causale volgreeksen) nevenschikking analoog met de klanken en tone[illegible], waarbij nooit op wiskundige onmogelijkheid wordt gesloten. Het kan zijn, dat door reeds gevormde hypothesen de te verrichten experimenten zoo samengesteld worden; dat doet aan de zaak niets af; het ja of neen, dat exact wordt beantwoord heeft slechts geldigheid voor een bepaalde beteekenis van de onderzochte vraag. De een zal ja, de ander neen kunnen zeggen, maar ieder echter een van beide. Toeval: de experimenten onuitvoerbaar worden, zonder zekerheid, ooit uitvoerbaar te zullen zijn. Dan geldt de stelling niet.

Wiskundig. ~~Hier~~ geldt de stelling in 't algemeen (in 't algem.) alles behalve. Immers het aantal probeeringen is ω, en alleen in sommige gevallen is die ω door inductie, d.w.z. overzicht van ω gelijke dingen, te beheerschen. Het ja of neen is dus in 't algemeen nooit op te lossen. (b.v. bij de ontwikkeling van π ~~komen er~~ cijfers 3 daar 4 of ~~[illegible]~~?), en de ~~stelling van het uitgesloten midden~~ geldt niet. Ook is niet elke ~~[illegible]~~ convergent of divergent; zuiverder uitgedrukt: of convergent of niet convergent. ~~Wat is echter~~

~~[illegible]~~

Onderscheid bij decimaalbreuken voor het n^{de} cijfer

Met het onbepaald groot worden van n neemt het werk om uit n het n^{de} cijfer te bepalen niet onbepaald toe.

Is nu b.v. het aantal vieren bij de ontwikkeling van π niet te drukken door een functie van n? Is dit te bewijzen dan is hiermede de stelling v. t. n. d. eerst bewezen.

Als ik een stelling kan aantoonen enz, heb ik een invariant (b.v. het woord grooter dan bij voortdurende probeeren afwegen grooter dan en kleiner dan) aangevoerd bij den voortgang der bestelling. Maar hoe maak ik nu uit, dat een of ander ding niet invariant is op den duur? Alleen door een ander ding, dat er aan verbonden is, en dat wel invariant is.

~~Gesteld nu alle invarianten [illegible] op de stelling, dan [illegible]~~

Kennen we nog een invloed (b.v. op het relatief aantal cijfers) bij benadering door decimaalbreuken van π) aantoonen dat bij (discontinue) toestotten gaat naderen tot een continuum die onder dat bereik der probabiliteit valt, dan is daar zeker geen invariant. Is dit b.v. het geval voor het aantal ondeelbare getallen te opzichte van de limietformule dan kunnen we niet zeggen, of bij toestotten al of niet blijvend in een bepaalden kring van de limiet afwijkt.

IX-G

Stellingen:

1°. lim $V = 0$.
2° lim $R\frac{dV}{dR} = 0$.
3° [illegible]

1°. ~~[illegible] die Clausius [illegible]~~
die Potentialfunction und das Potential, 4e Auflage, Leipzig 1885, p. 12, ~~[illegible]~~ aan de functie V oplegt, opdat $V = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\nabla^2 V}{r}$ zij, aan de functie V de voorwaarde op dat $\nabla^2 V$ binnen een gebied in het eindige gelegen ruimte willekeurige eindige waarden kan hebben, maar buiten die ruimte tot aan 't oneindige overal 0 is.
~~[illegible]~~ Van deze 4 voorwaarden zijn de laatste 3 overbodig.

2°. Ibid. p. 128 ~~[illegible]~~ leidt Clausius ~~[illegible]~~ Green'sche functie ~~[illegible]~~ (het eenduidig bepaald zijn der gestelde voorwaarden) af uit de p. 118 ~~[illegible]~~, dat in 't oneindige lim Ru en lim $R^2\frac{\partial u}{\partial R}$ niet oneindig groot mogen worden; ~~[illegible]~~. Voldoende is hier echter de voorwaarde dat u in 't oneindige 0 ~~[illegible]~~ moet worden.

3°. In Salmon-Fiedler, Anal. Geometrie des Raumes ~~II~~ p. 61 staat ten onrechte: „Jede ebene Krümmungslinie ist geodätisch."

4°. De beide formules van Maxwell (rot. en div.) zijn in één quaternionformule samen te vatten.

5°. De redeneeringen van Euclides zijn als redeneeringen even ~~[illegible]~~ gerechtvaardigd nadat de Cartesiaansche opbouw is uitgevonden, immers de gevolgtrekkingen wordt gevolgd zonder, wanneer men kennen krijgen en daar zonder kritische antinomieën kunnen met inhoud.

6°. In Mathem. Ann. 61 ~~[illegible]~~ bewijst Blumenthal ~~[illegible]~~ uit de eindigheid en differentieerbaarheid ~~[illegible]~~ der vectordistributies die in 't oneindige 0 worden, dat v is $= \nabla\int\frac{\nabla V}{r} + \nabla\int\frac{\nabla V}{r}$.
Deze stelling [illegible] is onafhankelijk van de eindigheid en differentieerbaarheid.

7°. Hij bewijst ~~[illegible]~~ daar tevens, dat de solenoidale en de ~~[illegible]~~ wervellooze vectoren, waarin door de genoemde formule de distributie verdeeld wordt, ~~[illegible]~~ (op een vectorpotentiaal constante na) eenduidig bepaald zijn door hun rotatie resp. divergentie.
Deze stelling is een bijzonder geval van de meer algemeene:
Een ~~[illegible]~~ scalardistributie, in 't oneindige van lager orde dan r^{n+1}, is door haar divergentie bepaald op bolfuncties van ~~[illegible]~~ de hoogste ~~[illegible]~~ de $n$de orde.

8°. Tusschen phenomenologische en theoretische beschouwingen in de natuurkunde bestaat geen scherpe grens.

Verbeteringen.

Hoofdst. 1.

Daarentegen dient uitdrukkelijk te worden opgemerkt, dat bij de Helmholtz'sche opvatting niet, bij de Hilbert'sche wel een segment zich laat omleggen.

De Hilbertsche „Basiswinkel ungleichsch. Dreieck"; ik schreef: een hoek laat zich wel omleggen, een gelijkb. driehoek niet; nu is van omleggen helemaal geen sprake in het platte vlak; ik moet dus van een ~~omgelegde~~ hoek helemaal niet spreken, en van den gelijkb. driehoek gewoon zeggen, dat zijn basishoeken ongelijk zijn.

Toevoegen bij de inleiding tot Hilbert Grundl. d. G.: ook al is het misschien niet onwaarschijnlijk, dat vaak de differentieerbaarheid uit de groepeigenschap volgt. (Hilbert vermoedt overigens ook de differentieerbaarheid door uniformiteit.)

Toevoeging bij Hamel: kan ik nu in 't algemeen niet een Cart. meetkunde [illegible] pseudo-rechte lijnen krijg.

Continuum niet te bouwen door discrete woorden, want die geven discrete voorstellingen, tenzij juist door het woord „continuum" verbonden.

Continuumprobleem door Cantor reeds in 1873 gesteld.

Klein ongelijk, want hij zegt, dat Lie zich tot anal. functies moest beperken. Cf. (IX, ongenumm. pag.)

Onderzoeken in Crelle 70, 71, 72 (1869, 1870), of Christoffel's en Lipschitz' onderzoekingen werkelijk kunnen worden veroordeeld.

eerst de volgende pag! IX-I

volgorde 3e taalste 4?

De geachte opponens heeft echter niet de ~~door mij bedoelde wiskunde~~ wiskunde zelf, maar het begeleidend taalgebouw op het oog, en de vraag blijft vooreerst of hij recht heeft, met eenigen zin de wiskunde door dat taalgebouw te vervangen, en ten tweede of in dat taalgebouw werkelijk met de beide elementen eenheid en nog eens kan worden volstaan. Natuurlijk hebben we nu nog maar alleen de woorden „continuum" en „enzoovoort", niet meer de begrippen. Daar we in de taal slechts een eindig aantal woorden gebruiken, kan in het taalgebouw het begrip „enzoovoort" werkelijk worden gemist, en hebben we slechts te maken met een eindig aantal dingen, door een eindig aantal relaties gebonden. Maar door relaties gebonden dingen vooronderstellen de intuitie: eerste ding — tijdsverband — tweede ding, zonder de continuumintuitie gaat het hier dus evenmin, als in de wiskunde zelf. We geven dus toe, dat in het taalgebouw, zooals het b.v. in het logische teekenschrift ~~staat~~ opgebouwd, de intuitie enzoovoort kan worden gemist, en het woord enzoovoort verklaarbaar is; de intuitie van continuum kan echter niet worden gemist en het woord continuum (in onzen zin) blijft onverklaarbaar; in den Cantorschen zin wordt het verklaarbaar, maar daar krijgt het al de zinloosheid van zoovele woorden der wisk. logica.

Maar nu: hoe komt u er toe, om het taalgebouw zoo op te trekken als u doet? Hoe komt u er toe, te zeggen:

(α) a voor b [redacted] b voor c

avant

a voor c,

(β) of: a voor c

en parallel

a voor b   b voor c

en op die wijze eenigen tijd voort te bouwen, waarbij het blijkt, dat nooit p voor q en tegelijk q voor p is af te leiden, zoodat de asymmetrie der relatie voor blijft gehandhaafd. M.a.w. het axioma der asymmetrie intact blijft? En evenzoo dat der transitiviteit?

Omdat u hier schijnbaar vrij nabouwt de begeleidende taal van intuitieve puntsystemen op het continuum (of de tijdsintuitie), daardoor komt het dat uw taalgebouwen lever en meer zijn, dan zinlooze figuurtjes of gestamel.

Ging u anders bouwen zoo, dat de asymmetrie (of transitiviteit) niet gehandhaafd bleef, dan zou u het systeem verwerpen, contradictoir vinden. Waarom? Op grond van de wiskundige intuitie, die u van te voren hadt. De niet-contradictoriteit van uw symbolische systeem is dus slechts een afspiegeling van het bestaan van het er door afgebeelde wiskundig systeem.

Intusschen, zelfs al wilde men de wiskundige intuitie als leidraad bij het logisch teekenschrift erkennen, maar toch volhouden, dat een teekensysteem gewettigd is, als het maar niet-contradictoir is, dan zou ook die illusie nog moeten verdwijnen, want niet-contradictoriteit waarborgt geen wiskundig bestaan.

—

2 pagina's verder

IX-[illegible] I

Mannoury

Er zijn twee mogelijkheden; òf je hebt het over levende voorstellingen, dan zijn er geen onherleidbare begrippen; hier is niet alleen het continuum (en het oneindige) onherleidbaar, maar al het andere
òf je hebt het discrete taalgebouw, en daar heb je genoeg aan ding en relatie, dus aan eenheid en nog eens van pag. 180. Daar treedt ook b.v. de definitie van oneindig en van het Cantorsche (discrete) continuum op, die evenwel de levende begrippen van continu en oneindig niet bevatten. En zoovoort bevat hier behalve de definitie (van oneindig (die herleidbaar is) in „zoo" een relatie tusschen relaties, eveneens onherleidbaar.

Antwoord.

Van de ~~levende~~ voorstellingen wordt toegegeven. ~~Van het taalgebouw wordt men geen eenheid~~ Maar de wiskunde bestaat nòch in de ~~levende voorstellingen~~, nòch in het taalgebouw, maar in de intuitieve constructie in het intellect, die onafhankelijk is van levende voorstellingen aan den eenen kant, en van de taal aan den anderen kant. Ik heb trachten toe te lichten, dat hier de elementaire operatie, het scheppen der veelheid het element is, en dat daar in eenheid in nog eens in continuum in enzoovoort (d.w.z. niet die woorden, maar de er door gewekte levende voorstellingen) niet uit zijn weg te denken, dus als onherleidbare voorstellingen moeten worden verklaard. Van eenheid behoeft dat geen nadere toelichting, van nog eens evenmin. Maar toch ook niet de voorstelling, dat de eerste en de tweede eenheid worden samen gedacht, dat dus bij het denken van de tweede ook de eerste nog in de voorstelling nawerkt. Die samenhoudingsvoorstelling ~~of tweede ding~~ (continuiteitsvoorstelling geeft nu direct de opvolging van drie dingen, n.l. eerste ding – samenhoudingsmedium – tweede ding letterlijk vertaald: ~~eerste ding~~ primum – continuum – secundum (vgl. Veroneses elementairformuleering: Ich denke zuerst ein Ding, nachher ein Ding); we kunnen ook zeggen: eerste ding – asymmetrische relatie – tweede ding; in andere klanken: eerste ding – tweede ding – derde ding; we hebben dus als onafscheidelijk attribuut van de mogelijkheid van samendenken van twee herkend de mogelijkheid van tusschenvoeging, die steeds verder kan worden voortgezet, zonder dat het samenhoudingsmedium ooit geheel zal worden vervangen door elementen. Op dezelfde wijze is onafscheidelijk attribuut van de samendenkingsintuitie of continuumintuitie de oneindige voortzetbaarheid; zooals elk ding kan worden gevolgd door een ander, zoo ook natuurlijk het bij het eerste genomen tweede ding. Al deze dingen zijn dus onherleidbaar, want zijn verschillende facetten van het ~~[illegible]~~ kleinste element van den wiskundigen opbouw.

← 1pg terug eerst

Slechts een IX–K

Wat u ten slotte zegt, dat enzoovoort in zoo sluitsen relatie tusschen relaties en niet een relatie zelf ziet, is geloof ik evenmin vol te houden. Wiskunde zou niet kunnen bestaan, als ik niet meermalen weer hetzelfde ding kon denken, b.v. eerst Jan, dan Piet, en dan weer denzelfden Jan. Zoo kan ik ook meermalen dezelfde relatie denken, en zoo bestaat wel degelijk tusschen 5 en 7 dezelfde relatie als tusschen 7 en 9 n.l. „+2 ="

En nog dit: Wilt u voor uw teekensysteem de niet-contradictoriteit bewijzen dan heeft u de intuïtie enzoovoort, die telkens toegepast kan worden gemist, weer noodig.

Barrau.

Het samendenken van twee punten is het eenige wiskundige.

Dat de irrationale punten werkelijk bestaan, blijkt pas, nadat u ze hebt geconstrueerd. Van te voren het bestaan van alle irrationale punten te ~~anticipeeren~~ is wel optimistisch, maar ongerechtvaardigd.

Uw transformaties van het continuum zijn voor mij slechts transformaties van de daarop gedefinieerde punten.

Wat bedoelt ge met „matrix"? Niet de verzameling der punten, iets anders dan de punten, maar dat kan met de punten geen wiskundige relatie hebben, daar de wiskunde alleen relaties tusschen punten kan definieeren.

Antwoord.

Reeds den vorigen opponent ~~antwoordde ik~~, ~~[illegible]~~ en in het proefschrift wordt herhaaldelijk uitgesproken, dat het discrete continuum van Cantor niet bestaat; hierin ga ik volkomen met u mee.
Maar het door mij bedoelde continuum is niets dan de intuïtie van samen,
houding, en die verschijnt in de wiskunde slechts als ding — tijds-
overgang — ding, of ding — asymmetrische relatie — ding. Het samen-
denken ~~[illegible]~~ in asymmetrische relatie, d.i. zonder volgorde, dat u schijnt
te bedoelen, is niet uit het vorige afgeleid. Als u b.v. zegt: ik denk
de twee samen, dan voert u ~~[illegible]~~ — en uw woorden begeleiden dit
zeer duidelijk — een derde ding, het „samen zijn" in, waaraan u beide
dingen, die te voren waren gegeven, door een asymmetrische relatie
verbindt. U kunt dus niet samen denken zonder meer, maar moet
samen denken in den tijd — als punt — continuum — punt; (en hierna is de schepping twee zonder meer of card. get. twee geoorloofd)
en het is duidelijk, dat ik deze intuïtie matrix kan noemen van meer
punten, daar ik feitelijk heb geschapen, wegens de ~~[illegible]~~
in één oogenblik te overziene schepping van het ordetype ω (ω of het ordetype η), en dan
wegens de in één ~~oogenblik~~ te voelen vrijheid ~~[illegible]~~ bij
het scheppen der aftelbaar oneindige verzameling, waarvan alle elementen aan
den eisch, op het continuum te liggen, voldoen. Op die manier is het
continuum, hoe paradox dat ook voor sommigen moge klinken, een matrix
van nog niet bestaande punten; wat kunt u daar overigens tegen hebben?
Kan van het ordetype η niet hetzelfde worden gezegd?
Intuïtief zie ik dan het continuum, dat nog onbekende gedetermineerde
benaderingen er op liggen, als zoodanig het matrix van nog ongeboren
punten. (vgl. mijn bewijs op pag. 9). Het bestaat dus onafhankelijk

van de er op te bouwen punten, is dus ook heel iets anders dan de verzameling van die punten; immers dan zou zijn schepping op die van de punten volgen.

Men gaat niet, behalve van discrete dingen, van relaties daartusschen, en alle verschillende relaties zijn slechts mogelijk op grond van de oer-relatie, de asymmetrische band door het tijdcontinuum. Zelfs de woorden die we spreken, door allerlei relaties onderling gebonden, zijn in de eerste plaats [klanken noodzakelijk] door de tijd daarbinnen samengebonden klanken; niets meer dan dat zijn de ~~op~~ opvolgende klanken één, twee, drie ——

Zelfs al zou het mogelijk zijn, uit de taal der wiskunde het woord continuum verwijderd te houden, wat een lange omschrijving zou noodig maken, en waardoor men zich zou moeten beperken tot eigenschappen over reeds geschapen punten en niet eigenschappen over nieuw te scheppen punten zou anticipeeren, dan nog zou men het begrip continuum, overal waar men beide dingen tegelijk beschouwt, dus in relatie tot elkaar beschouwt, m.a.w. overal waar men wiskunde doet, met zich meedragen.

Dat men nooit twee zonder meer denken, maar altijd twee gebonden door een continuum, maakt ook dat men uit het cardin. getal twee vanzelf tot het cardin. getal drie komt; of zoo: één — twee

één — $\left.\begin{matrix}\text{twee}\\ \text{een}\end{matrix}\right\}$ — twee

of zoo: één — twee

één — tusschen — twee.

Anders zou het na de mogelijkheid van het denken van twee weer een nieuw wonder zijn, dat ~~men~~ men ook drie kan denken.

wonder