Formeel Denken 2005
Uitwerkingen Toets 2: Predicatenlogica

Deze toets bestaat uit vijf opgaven die allemaal twee punten waard zijn. Veel succes!

In de eerste drie opgaven gebruiken we als model en interpretatie:

M	domein van de mensen
m	Maud
$V(x)$	x is vrouw
$K(x)$	x is knap
$O(x,y)$	x is de ouder van y

1. Vertaal in de taal van de predicatenlogica:

   Niemand is zijn eigen vader.

   $$\forall x \in M[\neg V(x) \to \neg O(x,x)]$$

   Merk op dat deze zin niet uitsluit dat iemand haar eigen moeder is, dus de $\neg V(x)$ moet er bij.

2. Vertaal in de taal van de predicatenlogica met gelijkheid:

   Geen van Mauds broers hebben kinderen.

   $$\forall x \in M\big[\big(\forall y \in M[O(y,m) \leftrightarrow O(y,x)]\big) \wedge \neg V(x) \to \neg \exists z \in M[O(x,z)]\big]$$

   Pas op dat het niet voldoende is om te zorgen dat Maud en haar broer één gemeenschappelijke ouder hebben, want dan heb je het ook over mogelijke halfbroers.

3. Omschrijf de betekenis van de volgende formule uit de predicatenlogica in het Nederlands:

   $$\forall x \in M \forall y \in M\big(V(y) \wedge O(y,x) \wedge K(y) \to \forall z \in M[O(y,z) \to K(z)]\big)$$

   Knappe moeders hebben knappe kinderen.

4. Geef een model M en een interpretatie I zodat

   $$(M,I) \not\models \forall x,y,z \in D[R(x,y) \wedge R(y,z) \to R(x,z)]$$

   Motiveer je antwoord.

   De formule
   $$\forall x,y,z \in D[R(x,y) \wedge R(y,z) \to R(x,z)]$$

beschrijft een zogenaamde transitieve relatie. Het is niet van belang als je die term niet kent; het is wel handig als je hem wel kent. Voorbeelden van transitieve relaties zijn bijvoorbeeld: in $\mathbb{N}$ $x < y$, $x > y$, $x = y$ of in de mensenwereld x is (verre) familie van y, x zit bij y in de klas.

Omdat er echter in de opgave $\not\models$ staat, moet je hier juist een model M en een interpretatie geven die *niet* transitief is. Ook daar heb je veel mogelijkheden. Om te motiveren dat zo'n relatie niet transitief is moet je een x, y en z aanwijzen waarbij $R(x, y) \wedge R(y, z)$ wel waar is, maar $R(x, z)$ niet. Controleer zelf dat in onderstaande voorbeelden dit het geval is.

D	$R(x, y)$	x	y	z
$\mathbb{N}$	$x \neq y$	0	1	0
$\mathbb{N}$	$x + y = 1$	0	1	0
mensen	x is ouder van y	ik	mijn dochter	mijn kleinzoon
mensen	x is kind van y	ik	mijn vader	mijn oma
mensen	x woont naast y	de man op nr 1	die op nr 3	die op nr 5
mensen	x houdt van y	ik	mijn vriendin	haar vriendin

(Toegegeven: de laatste is voor jullie moeilijk te controleren; jullie zullen maar moeten geloven dat ik niet van mijn vriendins vriendin houd!)

Als er wel een niet-transitieve relatie is gegeven, maar zonder motivatie is er $\frac{1}{2}$ afgetrokken.

5. Is de volgende formule waar?

$$\forall x \in D \exists y \in D \forall z \in D[\neg(x = y) \vee (x = z)]$$

Motiveer je antwoord.

De formule is waar. We geven een bewijs met de speltheoretische methode. Hierbij kiest de aanklager de $\forall$-variabelen en de advocaat de $\exists$-variabelen. In het bijzonder is het doel van de aanklager om te laten zien dat de formule onwaar is en die van de advocaat dat de formule waar is. Een slimme aanklager zal dus nooit vrijwillig een variabele kiezen waarmee de formule waar wordt; dat zal alleen maar gebeuren als hij niet anders kan.

Stel de aanklager kiest voor x het element $x_1 \in D$. Als de advocaat slim is probeert hij voor y een element y_1 te kiezen zodanig dat $\neg(x_1 = y_1)$. Want dan maakt het niet meer uit welke z de aanklager daarna kiest: de formule is al waar omdat de linkerhelft waar is en dus wint de advocaat.

Echter er staat hier niet voor niets *probeert*: het is niet zeker of het kiezen van zo'n y die anders is dan de reeds gekozen x_1 wel lukt. Omdat het namelijk voor alle modellen moet gelden, moet het ook gelden voor een situatie waarbij D slechts een element bevat: zeg $D = \{x_1\}$. De aanklager kiest natuurlijk deze x_1 als x. Vervolgens wordt de advocaat gedwongen om voor y ook deze x_1 te kiezen. Maar dan is de linkerhelft $\neg(x = y)$ onwaar! Het is nu de beurt aan de aanklager om z zo te kiezen dat ook de rechterhelft onwaar wordt. Echter, ook de aanklager heeft geen keus en moet wel $z = x_1$ kiezen. Maar dan geldt uiteraard $x = z$ en dus is dan de rechterhelft waar en weer wint de advocaat.

De conclusie is dan ook dan ongeacht het aantal elementen van D de advocaat het spel altijd wint en dus is de formule waar.

Strikt genomen zou je ook nog de situatie dat D slechts 0 elementen bevat en dus $D = \emptyset$ moeten beschrijven, maar omdat per definitie formules $\forall x \in \emptyset[\ldots]$ waar zijn, zien wij dat hier door de vingers.

De verdeling van de twee punten is grofweg als volgt gedaan:

- $\frac{1}{2}$ als de eindconclusie 'waar' is gegeven.
- 1 als wordt betoogd dat de advocaat 'altijd' een y_1 ongelijk aan de x_1 van de aanklager kan kiezen.
- $1\frac{1}{2}$ als wordt betoogd dat de advocaat alleen maar een y_1 ongelijk aan x_1 kan kiezen als D twee of meer elementen heeft.
- 2 als ook nog eens wordt uitgelegd waarom de formule waar is in de situatie dat D slechts één element heeft.