Formeel Denken 2006
Uitwerkingen Toets 4: Combinatoriek

1. G is *wel* samenhangend, want er is van ieder punt een pad naar ieder ander punt.

   G is *niet* een boom, want hij bevat de cykel $1 \to 2 \to 3 \to 1$ en een boom heeft per definitie geen cykel.

   G is *niet* bipartite, want er is geen manier om de punten 1, 2 en 3 met twee kleuren te kleuren zodat geen twee gelijkgekleurde punten verbonden zijn.

   G is *wel* planair, want de tekening op de toets heeft geen snijdende lijnen.

   G heeft *niet* een Euler-pad, want de punten 1, 2, 4 en 6 hebben allemaal oneven graad, en dat is meer dan twee punten met oneven graad, dus volgens de stelling van Euler is er geen Euler-pad.

   G heeft *wel* een Hamilton-pad: $1 \to 2 \to 5 \to 6 \to 7 \to 4 \to 3$.

2. De graaf $K_{m,n}$ heeft punten met graad n en m, want alle punten van de m zijn verbonden met de n andere punten, dus hebben graad n, en alle punten van de n zijn verbonden met de m andere punten, dus hebben graad m.

   Volgens de stelling van Euler heeft een samenhangende graaf een Euler-cykel dan en slechts dan als alle punten even graad hebben, dus heeft deze graaf een Euler-cykel dan en slechts dan als n en m allebei even zijn.

3. De volledige graaf op 5 punten K_5 heeft kleurgetal 5, want bij een puntkleuring van een volledige graaf moet ieder punt een andere kleur krijgen, omdat alle punten buren zijn.

4. **Basisstap:** $n = 1$:

   $1! = 1 \leq 1^1 = 1$, klopt.

   Inductiestap: $n = m + 1$:

   De inductiehypothese is

   $$m! \leq m^m \tag{IH}$$

   We moeten hieruit laten zien dat $(m + 1)! \leq (m + 1)^{m+1}$:

   $$(m+1)! = (m+1)\cdot m! \underset{\substack{\uparrow \\ \text{IH}}}{\leq} (m+1)\cdot m^m \leq (m+1)\cdot(m+1)^m = (m+1)^{m+1}$$

   dus dat klopt ook. □

5. De rij is:

   $$1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1$$

   De som van deze getallen is $2^6 = 64$.