Formeel Denken 2010
Tentamen
(18/01/11)

Dit tentamen heeft 15 opgaven en iedere opgave is 6 punten waard. De eerste 10 punten voor deze toets zijn gratis en het cijfer is het aantal punten gedeeld door tien. Veel succes!

1. Formaliseer als formule van de propositielogica de Nederlandse zin:

   Ik ben binnen of het regent niet, want ik word niet nat.

   Gebruik als woordenboek:

Reg	het regent
N	ik word nat
Bin	ik ben binnen

2. Schrijf de volgende formule van de propositielogica volgens de officiële grammatica uit de syllabus, en geef de waarheidstabel:

   $$\neg a \to b \wedge a \vee \neg c$$

3. Bestaan er formules f en g van de propositielogica zodat $\models f \wedge g$ maar $\not\models f \vee g$? Verklaar je antwoord.

4. Schrijf de volgende formule van de predikaatlogica volgens de officiële grammatica uit de syllabus, en geef een vertaling in het Nederlands:

   $$\exists x \in M\, \forall y \in M\, (H(x,y) \to H(y,x))$$

   Gebruik als woordenboek:

M	het domein van de mensen
$H(x,y)$	x houdt van y

5. Formaliseer de volgende Nederlandse zin als een formule van de predikaatlogica met gelijkheid:

   Als er twee personen zijn die niet van elkaar houden, houdt niet iedereen van elkaar.

   Gebruik hetzelfde woordenboek als in de vorige opgave.

6. Geef een interpretatie in een model waaronder de volgende formule van de predikaatlogica waar is:

   $$(\forall x, y \in D\, (R(x,y) \to R(y,x))) \wedge (\exists x \in D\, (\neg R(x,x)))$$

7. Geef een reguliere expressie r zodat:

   $$\mathcal{L}(r) = \{w \in \{a,b,c\}^* \mid w \text{ bevat zowel deelwoord } abc \text{ als deelwoord } cba\}$$

8. Geef een eindige automaat die de taal accepteert van de contextvrije grammatica:

   $$\begin{array}{rcl} S & \to & aS \mid A \\ A & \to & bS \mid aB \\ B & \to & Sa \mid \lambda \end{array}$$

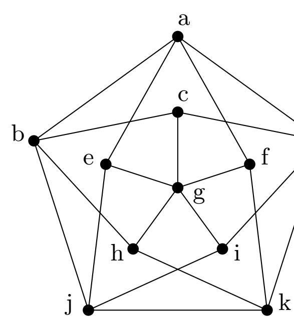
   Geef eerst een eenvoudige beschrijving van de woorden die in de taal van deze grammatica zitten. (Hint: vereenvoudig de grammatica door regels in elkaar te substitueren.)

9. Iemand claimt dat de volgende eigenschap

$$P(w) := w \text{ eindigt niet op } b$$

een invariant is van de grammatica uit de vorige opgave, maar dat klopt niet. Leg uit waarom dit geen invariant is.

10. Hieronder staat de zogenaamde Grötzsch graaf. Geef een Hamilton-circuit.



(Hint: er bestaat een Hamilton-circuit dat begint met $h \to g \to i$.)

11. Bewijs dat voor $n \geq 0$ geldt dat

$$1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^n = \frac{1}{2}(3^{n+1} - 1)$$

met inductie naar n. Definieer eerst

$$a_n = 1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^n$$

en geef een recursieve definitie van deze a_n. Geef vervolgens expliciet het inductiepredikaat $P(n)$ dat je gaat bewijzen in termen van a_n, en geef tenslotte het inductiebewijs.

12. Iemand heeft een zak met zeven objecten. Hij haalt er vijf uit, verft die rood, en stopt er vervolgens twee van terug in de zak. Op hoeveel manieren kan dit?

13. Schrijf de volgende formule van de modale logica volgens de officiële grammatica uit de syllabus, en teken de bijbehorende boom:

$$\Diamond\Box a \to \Diamond a$$

14. Geef een Kripkemodel $\mathcal{M}$ waarin de formule uit de vorige opgave niet geldt. Verklaar je antwoord. Laat uit je antwoord blijken dat je het verschil tussen $\Vdash$ en $\vDash$ hebt begrepen.

15. Formaliseer de volgende zin als LTL formule:

Na het atoom a mag het atoom b nooit meer waar worden.