Formeel Denken 2010
Uitwerkingen toets 4: Discrete wiskunde
(07/12/10)

1. Iedere lijn in de graaf draagt één bij aan de graad van allebei zijn uiteinden. Vandaar dat geldt dat

   $$\text{som van de graden in een graaf} = 2 \cdot \text{aantal lijnen in de graaf}$$

   en dat is dus altijd even.

2. Er bestaat een boom met een Hamiltonpad. Een voorbeeld hiervan is de graaf K_2. De K_2 is duidelijk een boom: hij is samenhangend want tussen ieder tweetal verschillende punten is een pad (de enige mogelijkheid hiervoor is de twee punten 1 en 2 en hiertussen loopt het pad $1 \to 2$) en hij heeft geen cykels (omdat er maar één lijn is, zijn de enige paden $1 \to 2$ en $2 \to 1$ en dit zijn geen cykels). Verder heeft K_2 het Hamiltonpad $1 \to 2$ want alle punten worden aangedaan.

   Een Hamiltoncykel is een Hamiltonpad waarbij het eerste en laatste punt gelijk zijn. In het bijzonder is het dus een cykel. Er bestaat dus geen boom met een Hamiltoncykel, want een boom is gedefinieerd als een samenhangende graaf zonder cykels. En dus bevat een boom nooit een cykel, laat staan een Hamiltoncykel.

3. De K_n heeft kleurgetal n. K_n is de volledige graaf met n punten. Het kleurgetal is het kleinste aantal kleuren dat nodig is om alle punten een kleur te geven zonder dat twee buren dezelfde kleur krijgen. Ieder tweetal punten in de K_n zijn per definitie door een lijn verbonden en moeten dus in een kleuring verschillende kleuren krijgen. Daarom moeten alle n punten verschillende kleuren krijgen en is het kleurgetal n.

4. Als recursieve wiskundige definitie (dit was het antwoord dat was bedoeld in de opgave):

   $$\begin{aligned} 0! &= 1 \\ (n+1)! &= (n+1) \cdot n! \qquad \text{voor } n \geq 0 \end{aligned}$$

   Als recursieve C functie (mag ook):

```
int fact(int n) {
  if (n == 0)
    return 1;
  else
    return n*fact(n - 1);
}
```

5. We bewijzen dat 6^n eindigt op een 6 voor $n \geq 1$ met inductie naar n. Het inductiepredikaat is

$$P(n) := \big(6^n \text{ eindigt op } 6\big)$$

Merk op dat P een *predikaat* is, dus een eigenschap. En geen getal. Je kunt er dus niet mee rekenen. Iets opschrijven als $6 \cdot P(n)$ heeft dan ook geen betekenis.

Stelling: $P(n)$ geldt voor alle $n \geq 1$.

Basisstap: Het geval dat $n = 1$. We moeten dus bewijzen dat $P(1)$ geldt, dus dat

$$6^1 \text{ eindigt op } 6$$

En inderdaad eindigt $6^1 = 6$ op een 6.

Inductiestap: Voor iedere $n \geq 1$ moeten we gegeven de inductiehypothese $P(n)$, dus gegeven dat

$$6^n \text{ eindigt op } 6$$

laten zien dat ook $P(n+1)$ geldt. Dus dat

$$6^{n+1} \text{ eindigt op } 6$$

geldt. Dit volgt uit de inductiehypothese omdat

$$6^{n+1} = 6 \cdot 6^n$$

en omdat als je een getal dat eindigt op een 6 met 6 vermenigvuldigt het resultaat ook weer op 6 eindigt.

(Dit laatste kan precies gemaakt worden. Bedenk dat je elk getal dat eindigt op een 6 kunt schrijven als $10k + 6$ voor een of andere k. En dan zie je dat

$$6 \cdot (10k + 6) = 10\,(6k + 3) + 6$$

Maar deze formule is niet nodig voor een correcte uitwerking van deze opgave.)

Zie `http://www.youtube.com/watch?v=3OOLZtVBLVM` voor een videocollege over deze opgave. (Met dank aan Sigrid.)

6. Een definitie van $\binom{n}{k}$ is het aantal manieren om k objecten uit n objecten te kiezen. Dit is natuurlijk hetzelfde als het aantal manieren om de $n - k$ objecten te kiezen die we oorspronkelijk *niet* hadden gekozen. Vandaar de relatie.

   Deze relatie betekent dat de driehoek van Pascal symmetrisch is.