Formeel Denken 2010
Uitwerkingen inhaaltoets
(11/01/11)

1. Een interpolant is $\neg b$. Dat het logisch gevolg uit de opgave geldt, en dat $\neg b$ een interpolant is blijkt uit de waarheidstabel:

a	b	c	$\neg(a \to b)$	$\neg b$	$b \to c$
0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	1	1
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0
1	1	1	0	0	1

2. $$(\forall a \in D\, (\forall n \in D\, (((\forall x \in D\, R(a,x)) \land (\forall x \in D\, \neg R(n,x))) \to R(a,n))))$$

   Deze formule is logisch waar, want uit $\forall x \in D\, R(a,x)$ volgt dat $R(a,n)$.

3. $$(aa \cup a \cup \lambda)(b(aa \cup a \cup \lambda))^*$$

4. Inductie naar het aantal lijnen van G:

   Basisstap: Als G nul lijnen heeft is het aantal componenten natuurlijk het aantal punten.

   Inductiestap: Laat G een graaf zijn die $n+1$ lijnen en m punten heeft. Maak de graaf G' door één van die lijnen, zeg (p,q) weg te laten. Dan heeft G' natuurlijk nog steeds geen cykels, en dus met de inductiehypothese $m-n$ componenten. We moeten laten zien dat G $m-(n+1) = m-n-1$ componenten heeft. We moeten dus laten zien dat door het weglaten van de lijn (p,q) er precies één component bij is gekomen.

   Dat er minstens één component meer is volgt uit het feit dat p en q in G in dezelfde component zaten maar in G' niet (want anders zou het pad tussen p en q in G' met de lijn (p,q) een cykel in G zijn geweest).

   Dat er niet nog een extra component bijkomt is iets lastiger in te zien. Laat r een punt zijn uit de component van p en q in G. Dan is er een pad van r naar p in G. Mocht dit pad de lijn (p,q) bevatten, dan kun je dit pad inkorten tot een pad naar q dat de lijn (p,q) niet bevat. Dus is r in G' hetzij in de component van p, hetzij in de component van q.

5. Neem als model $\mathcal{M} = (W, R, V)$ met

$$\begin{array}{rcl} W & = & \{t_0, t_1, t_2, \ldots\} \\ R(t_i) & = & \{t_j \mid i \leq j\} \\ V(t_0) & = & \{a\} \\ V(t_i) & = & \emptyset \quad \text{voor } i > 0 \end{array}$$

We hebben nu $t_0 \Vdash a$, dus $t_0 \Vdash \mathcal{F}a$, maar $t_1 \nVdash \mathcal{F}a$ (want in geen enkele wereld t_i met $i \geq 1$ wordt a nog waar), dus $t_0 \nVdash \mathcal{G}\mathcal{F}a$ (want $t_1 \in R(t_0)$).

Dus we hebben ook $t_0 \nVdash \mathcal{F}a \leftrightarrow \mathcal{G}\mathcal{F}a$, en dus ook $\mathcal{M} \not\models \mathcal{F}a \leftrightarrow \mathcal{G}\mathcal{F}a$.