

Formeel Denken 2011
Uitwerkingen toets 3: Talen en automaten
(16/11/11)

1. Neem $L_1 := \{a, b\}$. Dan geldt $ab \in L_1^*$, want ab is de concatenatie van twee elementen van L_1 . Maar $ab \notin L_1$. Dus $L_1^* \neq L_1$.

Voor een ander voorbeeld, zie de volgende opgave.

2. Er geldt $L_2 = \{\lambda\}$, dus L_2 heeft 1 element.

\emptyset^* bestaat uit de woorden die de concatenatie van nul of meer elementen van \emptyset zijn. Maar \emptyset heeft helemaal geen elementen, dus één of meer elementen concateneren kan niet. Evenwel kan nul elementen concateneren wél, met als resultaat het lege woord λ . Vandaar.

- 3.

$$a(a \cup b)^*a \cup a \cup b(a \cup b)^*b \cup b$$

- 4.

$$S \rightarrow aaSb \mid \lambda$$

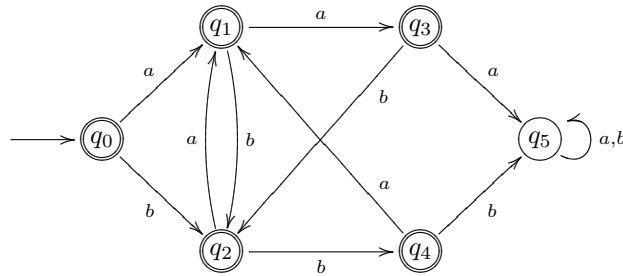
- 5.

$$a^*b^*$$

$$S \rightarrow aS \mid B$$

$$B \rightarrow bB \mid \lambda$$

- 6.



- 7.

$$S \rightarrow \lambda$$

8. Ja, dit is een invariant waarmee je kan laten zien dat $aaaaaaaaa \notin \mathcal{L}(G_8)$.

Om dit aan te tonen moeten we twee dingen controleren:

- $P(w)$ is een invariant van G_8 .

Hiervoor moeten we op zijn beurt twee dingen laten zien:

- $P(S)$ geldt.

Dit is het geval, want het woord S bevat nul a 's en één S . Het aantal a 's plus twee maal het aantal S 'en is dus twee, en dat is nul plus twee, en nul is een drievoud want is gelijk aan driemaal nul.

- $P(w)$ blijft behouden onder productiestappen.

Dit volgt uit het feit dat iedere productieregel een drievoud toevoegt aan 'het aantal a 's plus twee maal het aantal S 'en'. Zie de volgende tabel:

| productieregel | toename a 's | toename S 'en | toename ' a 's + $2 \times S$ 'en' |
|-------------------------|----------------|-----------------|--------------------------------------|
| $S \rightarrow aAa$ | +2 | -1 | $2 + 2 \times (-1) = 0 = 3 \times 0$ |
| $S \rightarrow SaS$ | +1 | +1 | $1 + 2 \times 1 = 3 = 3 \times 1$ |
| $A \rightarrow aS$ | +1 | +1 | $1 + 2 \times 1 = 3 = 3 \times 1$ |
| $A \rightarrow SaAaS$ | +2 | +2 | $2 + 2 \times 2 = 6 = 3 \times 2$ |
| $A \rightarrow \lambda$ | +0 | +0 | $0 + 2 \times 0 = 0 = 3 \times 0$ |

- $P(aaaaaaaaa)$ geldt niet.

Dit klopt ook, want $aaaaaaaaa$ bevat 9 a 's en 0 S 'en, en dus is 'het aantal a 's plus twee maal het aantal S 'en' gelijk aan 9, en dat is niet een drievoud plus twee maar een drievoud plus nul.