Formeel Denken 2012
Uitwerkingen Toets 3: Talen en automaten
(12/11/12)

De eerste drie opgaven gaan over de taal

$$L_0 := \{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ begint met } a \text{ en } |w| \text{ is even, of } w \text{ begint met } b \text{ en } |w| \text{ is oneven}\}$$

Er geldt dus $\lambda \notin L_0$, en $babba \in L_0$ want $babba$ begint met een b en $|babba| = 5$.

1. Geef een reguliere expressie voor L_0. (20 punten)

$$(a(a \cup b) \cup b)\,((a \cup b)(a \cup b))^*$$

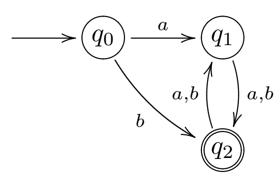
2. Geef een contextvrije grammatica voor L_0. Is deze grammatica rechtslineair? Waarom volgt uit de vorige opgave dat er een rechtslineaire grammatica voor L_0 bestaat? Verklaar je antwoorden. (20 punten)

$$\begin{array}{lcl} S & \to & aA \mid bB \\ A & \to & aB \mid bB \\ B & \to & aA \mid bA \mid \lambda \end{array}$$

Deze grammatica is rechtslineair want er is geen rechterkant van een regel waar een hulpsymbool niet helemaal aan het eind staat.

Uit de vorige opgave blijkt dat L_0 regulier is, en de reguliere talen zijn precies de talen waarvoor er een rechtslineaire grammatica is.

3. Geef een eindige automaat die L_0 herkent en die zo min mogelijk toestanden heeft. (20 punten)



De volgende twee opgaven gaan over de contextvrije grammatica G gegeven door de drie productieregels

$$S \quad \to \quad aaSb \mid aSbb \mid \lambda$$

4. Geef alle producties volgens deze grammatica van het woord *aaabbb*.
(5 punten)

$$S \to aaSb \to aaaSbbb \to aaabbb$$
$$S \to aSbb \to aaaSbbb \to aaabbb$$

5. Iemand wil laten zien dat $babba \notin \mathcal{L}(G)$, en claimt dat de eigenschap

$$P(w) := w \text{ bevat niet het woord } ba$$

een invariant is waarmee dit bewezen kan worden. Laat zien dat dit niet klopt, en geef een eigenschap die hiervoor wel een geschikte invariant is. Verklaar je antwoord. (15 punten)

Deze eigenschap is geen invariant, want hij blijft niet behouden onder de productiestap

$$bS \to baaSb$$

want bS bevat niet het woord ba, maar $baaSb$ bevat wel het woord ba.

Een invariant die wel werkt is:

$$P'(w) := \text{het aantal symbolen uit } \{\text{a,b}\} \text{ in } w \text{ is een drievoud}$$

Dit is een invariant want:

- Het woord S bevat nul symbolen uit $\{a, b\}$ en nul is een drievoud, dus $P'(S)$ geldt.
- De eigenschap blijft behouden onder productiestappen, want iedere stap voegt drie of nul symbolen uit {a,b} toe.

Tenslotte voldoet *baaba* niet aan deze eigenschap, want *baaba* bevat vijf symbolen uit $\{a, b\}$ en vijf is geen drievoud, dus laat deze invariant zien dat $baaba \notin \mathcal{L}(G)$.

6. Voor elke taal L geldt dat als L^* maar eindig veel verschillende woorden bevat dat dan $L^* = \{\lambda\}$. Leg uit waarom dit zo is, en geef alle talen waarvoor $L^* = \{\lambda\}$. (10 punten)

Als L een woord $w \neq \lambda$ bevat, dan bevat L^* alle woorden w^n en deze zijn allemaal verschillend, dus dan is L^* oneindig.

De enige talen die niet zo'n woord bevatten zijn $\emptyset$ en $\{\lambda\}$, en voor beide talen geldt dat $L^* = \{\lambda\}$. Dat λ er in zit is duidelijk, want die zit in alle talen van de vorm L^*, en dat er niet meer in zit is ook duidelijk want hoe vaak je ook λ achter elkaar plakt, het blijft λ.