Formeel Denken 2013
Uitwerkingen Inhaaltoets
(08/01/14)

1. Geef formules van de propositielogica f en g zodat

$$\models (f \to g) \vee (g \to f)$$
$$f \not\models g$$
$$g \not\models f$$

(15 punten)

Neem $f = a$ en $g = b$. Bekijk dan de volgende waarheidstabel, waarin we voor het gemak ook de namen van de modellen hebben opgenomen.

	a	b	$a \to b$	$b \to a$	$(a \to b) \vee (b \to a)$
v_0	0	0	1	1	1
v_1	0	1	1	0	1
v_2	1	0	0	1	1
v_3	1	1	1	1	1

We zien:

- Voor alle modellen v_i geldt $v_i((a \to b) \vee (b \to a)) = 1$, dus $\models (a \to b) \vee (b \to a)$.
- Voor v_2 geldt $v_2(a) = 1$ maar $v_2(b) = 0$, dus $a \not\models b$.
- Voor v_1 geldt $v_1(b) = 1$ maar $v_1(a) = 0$, dus $b \not\models a$.

2. Vertaal in de taal van de predikaatlogica met gelijkheid:

Iedere boom met minstens twee punten heeft altijd een punt met graad één.

Gebruik hierbij het woordenboek:

P	het domein van de punten van de graaf
L	het domein van de lijnen van de graaf
B	de graaf is een boom
$I(p_1, l, p_2)$	lijn l verbindt de punten p_1 en p_2

(20 punten)

Merk op dat er slechts sprake is van één graaf G met bijbehorende domeinen P en L. Vandaar dat er niet over de grafen zelf gekwantificeerd wordt, maar alleen over de punten en lijnen van die ene graaf.

We definiëren wat hulppredikaten:

$$\begin{array}{rcl} T & := & \text{de graaf heeft minstens twee punten} \\ & := & \exists p, q \in P[p \neq q] \\ V(p,q) & := & \text{punten } p \text{ en } q \text{ zijn verbonden} \\ & := & \exists l \in L[I(p,l,q)] \\ E(p) & := & \text{punt } p \text{ heeft graad 1} \\ & := & \text{er is precies één punt } q \text{ dat met } p \text{ verbonden is} \\ & := & \exists q \in P[V(p,q) \wedge \forall r \in P[V(p,r) \to r = q]] \end{array}$$

De formule wordt dan

$$(B \wedge T) \to \exists p \in P[E(p)]$$

Uitgeschreven in de originele predikaten wordt dat:

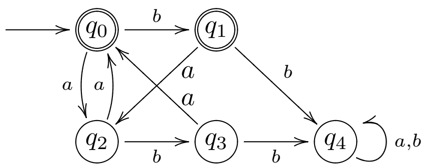
$$\begin{array}{c} (B \wedge \exists p, q \in P[p \neq q]) \\ \to \\ \exists p \in P[\exists q \in P[\exists l \in L[I(p,l,q)] \wedge \forall r \in P[(\exists l \in L[I(p,l,r)]) \to r = q]]] \end{array}$$

3. Geef een eindige automaat voor de taal

$$L_3 := \{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ heeft een even aantal } a\text{'s}\} \cap \overline{\{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ bevat } bb\}}$$

(15 punten)

Woorden in L_3 moeten een even aantal a's bevatten en mogen geen twee b's direct na elkaar hebben. De bovenste rij toestanden geeft de situaties weer waarin er een even aantal a's is gelezen, de onderste rij een oneven aantal. De eerste kolom eeft de situaties weer waarin het laatste symbool geen b was, de middelste kolom de situaties waarin het laatste symbool wel b was. De derde kolom geeft de put weer.



4. Bewijs met inductie dat iedere boom met minstens twee punten kleurgetal twee heeft. Je mag gebruiken dat iedere boom met minstens twee punten altijd een punt heeft met graad één. (20 punten)

Propositie:

Elke boom met n punten heeft kleurgetal 2 voor alle $n \geq 2$

Bewijs met inductie naar n. 1

$$P(n) \;:=\; \text{Elke boom met } n \text{ punten heeft kleurgetal 2}$$ 2

Basisstap. We laten zien dat $P(2)$ geldt, ofwel 3
Elke boom met 2 punten heeft kleurgetal 2

Dit is zo, want er is op isomorfie na maar één boom met 2 punten: $\langle\{p,q\},\{(p,q)\}\rangle$. Omdat p en q verbonden zijn is het kleurgetal minstens twee. Maar omdat de boom slechts twee punten heeft is het kleurgetal ook maximaal 2. Dus is het kleurgetal 2. 4

Inductiestap. Laat n een willekeurig getal zijn met $n \geq 2$ 5

Neem aan dat we al weten dat $P(n)$ geldt, ofwel 6
elke boom met n punten heeft kleurgetal 2. (inductiehypothese IH)

We laten zien dat $P(n+1)$ ook geldt, ofwel 7
elke boom met (n + 1) punten heeft kleurgetal 2.

Dit is zo, want Zij B een willekeurige boom met $n+1$ punten. Dan is er een punt p in die boom met graad 1. Dat punt p is dus verbonden met precies één ander punt q in de boom B. Als we nu punt p en de bijbehorende lijn (p,q) weglaten, krijgen we een boom B', want B' is nog steeds samenhangend en bevat nog steeds geen cykels. Maar boom B' heeft n punten en heeft dus kleurgetal 2 op grond van de IH. Dus kunnen we B' met rood en blauw kleuren zodat punt q rood is. Als we dan punt p blauw kleuren hebben we ook boom B met rood en blauw gekleurd, dus het kleurgetal is maximaal 2. Omdat p en q met elkaar verbonden zijn, kan het kleurgetal van B ook niet 1 zijn, dus is het 2. 8

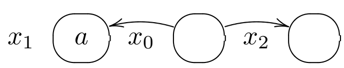
Dus volgt met inductie dat $P(n)$ geldt voor alle $n \geq 2$ 9

5. Geef een Kripke-model dat laat zien dat axiomaschema 5 niet volgt uit axiomaschema 4. Deze axiomaschema's zijn:

$$\begin{array}{ll} 4 & \Box f \to \Box\Box f \\ 5 & \Diamond f \to \Box\Diamond f \end{array}$$

(20 punten)

Axiomaschema 4 staat voor transitief; 5 voor Euclidisch. Neem $f = a$ en het volgende Kripke model $\mathcal{M}$:



Bekijk nu de volgende tabel:

$\Vdash$	a	$\Box a$	$\Box\Box a$	$\Box a \to \Box\Box a$	$\Diamond a$	$\Box\Diamond a$	$\Diamond a \to \Box\Diamond a$
x_0	0	0	1	1	1	0	0
x_1	1	1	1	1	0	1	1
x_2	0	1	1	1	0	1	1

Voor $i \in 0, 1, 2$ geldt $x_i \Vdash \Box a \to \Box\Box a$, dus $\mathcal{M} \vDash \Box a \to \Box\Box a$. Maar $x_0 \nVdash \Diamond a \to \Box\Diamond a$, dus $\mathcal{M} \nvDash \Diamond a \to \Box\Diamond a$. Dus transitief impliceert niet Euclidisch.