Formeel Denken 2014
Uitwerkingen Toets 3: Talen en automaten
(22/10/14)

1. Geef een reguliere expressie voor de taal (15 punten)

$$L_1 := \{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ bevat } ab \text{ en } w \text{ bevat } ba\}$$

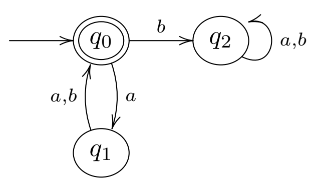
Als elk woord in L_1 een ab en een ba moet bevatten, moet er ergens in het woord een rijtje b's tussen twee a's voorkomen, of andersom. Een expressie die dit weergeeft is:

$$(a \cup b)^*(abb^*a \cup baa^*b)(a \cup b)^*$$

Denk er aan dat de ab en ba kunnen overlappen, dus dat ook $aba \in L_1$. (Voor $(a \cup b)^*$ kun je op zich ook $(a^*b^*)^*$ gebruiken, maar dat is een heel vreemde manier om 'een willekeurig woord over het alfabet $\{a,b\}$' met een reguliere expressie te beschrijven.)

2. Gegeven de taal $L_2 := \mathcal{L}((aa \cup ab)^*)$.

   (a) Geef het toestandsdiagram van een eindige automaat die de taal L_2 herkent. (15 punten)



   (b) Geef de gevonden automaat ook als vijftal $\langle \Sigma, Q, q_0, F, \delta \rangle$. (5 punten)

We hebben $L_2 = \mathcal{L}(M_2)$ als $M_2 = \langle \Sigma, Q, q_0, F, \delta \rangle$ met

$$\Sigma = \{a,b\}$$
$$Q = \{q_0, q_1, q_2\}$$
$$F = \{q_0\}$$

en $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ de functie gegeven door

$$\delta(q_0,a) = q_1$$
$$\delta(q_0,b) = q_2$$
$$\delta(q_1,a) = q_0$$
$$\delta(q_1,b) = q_0$$
$$\delta(q_2,a) = q_2$$
$$\delta(q_2,b) = q_2$$

3. Geef een contextvrije grammatica voor de taal (15 punten)

$$L_3 := \{uvcv^R u^R \mid u \in \{a,c\}^*, v \in \{b,c\}^*\}$$

(Er geldt bijv. $accbbcbbcca \in L_3$, met $u = ac$ en $v = cbb$.)

We gebruiken het eindsymbool A om het stuk vcv^R te produceren. Zowel bij S en A zorgen we ervoor dat de linker- en rechterkanten met elkaar corresponderen door de woorden van binnen naar buiten te laten aangroeien:

$$S \to aSa \mid cSc \mid A$$
$$A \to bAb \mid cAc \mid c$$

Een productie van het voorbeeldwoord in deze grammatica is:

$$S \to aSa \to acSca \to acAca \to accAcca \to accbAbcca \to accbbAbbcca \to accbbcbbcca$$

4. Gegeven de contextvrije grammatica G_4:

$$S \to aB \mid aaa \mid bS$$
$$B \to abS \mid bB \mid \lambda$$

(a) Is G_4 rechtslineair? Verklaar je antwoord. (10 punten)

Ja, de grammatica is rechtslineair. Er is geen enkel hulpsymbool dat aan de rechterkant van de pijl staat dat niet helemaal uiterst rechts staat.

(b) Iemand claimt dat

$$P(w) := w \text{ bevat geen } aaaa$$

een invariant is die laat zien dat $aaaa \notin \mathcal{L}(G_4)$. Klopt dit? Verklaar je antwoord. (NB: als de invariant niet klopt, hoef je niet een invariant te geven die wél klopt.) (10 punten)

Dit is geen goede invariant. Neem het woord $aaaS$. Dan is het duidelijk dat $P(aaaS)$ geldt. Maar $aaaS \to aaaaB$, en $P(aaaaB)$ geldt niet. Dus de eigenschap blijft niet behouden onder de transities. Een invariant die wel werkt is

$$P(w) := \text{óf } w \in \{S, aB, a, aaa\}, \text{ óf } w \text{ eindigt op een woord uit } \{bS, bB, baB, b, ba, baaa\}$$

5. Laat L een reguliere taal zijn.

(a) Geldt dat als $L \subseteq L'$, dat L' dan ook altijd een reguliere taal is? Verklaar je antwoord. (5 punten)

Dit is niet waar. Neem $L = \emptyset$. Die lege taal is regulier want $\emptyset = \mathcal{L}(\emptyset)$. Verder weten we dat de taal $L' = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ niet regulier is. Er geldt echter wel dat $L \subseteq L'$.

(b) Geldt dat als $L' \subseteq L$, dat L' dan ook altijd een reguliere taal is? Verklaar je antwoord. (5 punten)

Ook dit is niet waar. Neem $L = \{a, b\}^*$. Die taal is regulier want $L = \mathcal{L}((a \cup b)^*)$. Neem weer $L' = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$, waarvan we weten dat hij niet regulier is. Er geldt echter wel dat $L' \subseteq L$.

6. Geldt onderstaande gelijkheid voor iedere taal L? (10 punten)

$$L^* = \{\lambda\} \cup LL^*$$

Verklaar je antwoord.

Ja, dit geldt voor iedere taal L. De taal L^* bestaat uit nul of meer concatenaties van woorden uit L. Het deel met nul concatenaties is precies gelijk aan $\{\lambda\}$; het deel met één of meer concatenaties is precies gelijk aan LL^*, want de L staat hier voor die verplichte ene concatenatie en L^* voor alle overige concatenaties.

Wat formeler opgeschreven:

$$\begin{aligned}
L &= \{w_1 w_2 \cdots w_k \mid k \in \mathbb{N} \text{ en } w_i \in L \text{ voor alle } i \in \{1, 2, \ldots, k\}\} \\
&= \{w_1 w_2 \cdots w_k \mid k \in \mathbb{N} \text{ en } k = 0 \text{ en } w_i \in L \text{ voor alle } i \in \{1, 2, \ldots, k\}\} \\
&\quad \cup \\
&\quad \{w_1 w_2 \cdots w_k \mid k \in \mathbb{N} \text{ en } k > 0 \text{ en } w_i \in L \text{ voor alle } i \in \{1, 2, \ldots, k\}\} \\
&= \{\lambda\} \cup \{w_1 v_1 \cdots v_{k-1} \mid k \in \mathbb{N} \text{ en } k > 0 \text{ en } w_1 \in L \text{ en } v_i \in L \text{ voor alle } i \in \{1, 2, \ldots, k-1\}\} \\
&= \{\lambda\} \cup L\{v_1 \cdots v_{k-1} \mid k \in \mathbb{N} \text{ en } k > 0 \text{ en } v_i \in L \text{ voor alle } i \in \{1, 2, \ldots, k-1\}\} \\
&= \{\lambda\} \cup L\{v_1 \cdots v_{k'} \mid k' \in \mathbb{N} \text{ en } v_i \in L \text{ voor alle } i \in \{1, 2, \ldots, k'\}\} \\
&= \{\lambda\} \cup LL^*
\end{aligned}$$