Formeel Denken 2014
Uitwerkingen Toets 5: Modale logica
(16/12/14)

In de tweede en vierde opgave gebruiken we het woordenboek:

S	ik studeer in de kerstvakantie
W	ik ga in de kerstvakantie op wintersport

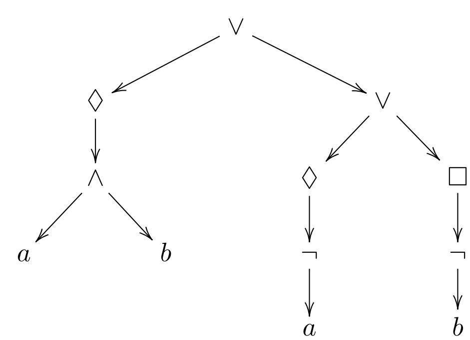
1. Geef bij de volgende formule van de modale logica de vorm die aan de officiële grammatica voldoet, en teken de bijbehorende boom: (15 punten)

$$\Diamond(a \wedge b) \vee \Diamond\neg a \vee \Box\neg b$$

De formule is:

$$(\Diamond(a \wedge b) \vee (\Diamond\neg a \vee \Box\neg b))$$

De bijbehorende boom is:



2. Benader de betekenis van de volgende formule van de deontische logica zo goed mogelijk door een Nederlandse zin: (10 punten)

$$\Diamond(S \wedge W) \vee \Diamond\neg S \vee \Box\neg W$$

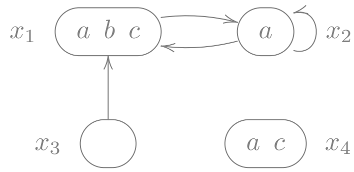
In de deontische logica betekent $\Box f$ 'je moet f' en $\Diamond f$ 'je mag f'. Een vrij letterlijke vertaling wordt dan:

Ik mag studeren in de kerstvakantie en in de kerstvakantie op wintersport gaan, en/of ik mag niet studeren in de kerstvakantie, en/of ik moet niet op wintersport gaan in de kerstvakantie.

Echter de 'mag niet studeren' die er nu staat is weliswaar een letterlijke vertaling van $\Diamond\neg S$, maar geeft toch niet de juiste intentie weer. Bij 'ik mag niet studeren' is het schijnbaar verboden om te studeren, terwijl $\Diamond\neg S$ eigenlijk aangeeft dat je ervoor mag kiezen om niet te studeren, maar het is niet verboden om te studeren. Een soortgelijk probleem zit er bij de 'moet niet op wintersport'. In het Nederlands betekent dat dat je nog best op wintersport zou mogen, maar de formule $\Box\neg W$ geeft juist aan dat dat verboden is. Deze problemen zouden voorkomen kunnen worden als er haakjes in de zin gebruikt zouden mogen worden, maar dat doen we niet in het Nederlands. Al met al betekent dat dat bovenstaande zin verbeterd dient te worden tot iets als:

In de kerstvakantie, mag ik studeren en op wintersport gaan, en/of hoef ik niet te studeren, en/of mag ik niet op wintersport gaan.

3. Het Kripke-model $\mathcal{M}_3$ wordt gedefinieerd door: (15 punten)



Geldt de volgende uitspraak?

$$\mathcal{M}_3 \vDash \Diamond(a \wedge b) \vee \Diamond\neg a \vee \Box\neg b$$

Verkaar je antwoord.

De tabel geeft de status van de $\Vdash$-relatie weer:

$\Vdash$	a	b	$a \wedge b$	$\neg a$	$\neg b$	$\Diamond(a \wedge b)$	$\Diamond\neg a$	$\Box\neg b$	$\Diamond\neg a \vee \Box\neg b$	$\Diamond(a \wedge b) \vee \Diamond\neg a \vee \Box\neg b$
x_1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1
x_2	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1
x_3	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1
x_4	1	0	0	0	1	0	0	1	1	1

Omdat in elke wereld x_i geldt $x_i \Vdash \Diamond(a \wedge b) \vee \Diamond\neg a \vee \Box\neg b$, geldt ook $\mathcal{M}_3 \vDash \Diamond(a \wedge b) \vee \Diamond\neg a \vee \Box\neg b$.

4. Deze opgave gaat over de Nederlandse zin:

In de kerstvakantie studeer ik totdat ik op wintersport ga.

(a) Geef een LTL formule die de betekenis van deze zin zo goed mogelijk omschrijft. Je mag ervan uitgaat dat je deze zin uitspreekt op de eerste dag van de kerstvakantie. (10 punten)

De meest voor de hand liggende formule is $S\,\mathcal{U}\,W$.

(b) Is het volgens de zin mogelijk dat je voordat je op wintersport gaat ook af en toe even niet studeert? Leg uit waarom je interpretatie van de zin in dit opzicht klopt met je formule bij het vorige onderdeel. (5 punten)

Nee, je bent schijnbaar gedwongen om continu te studeren. Met 'continu' bedoelen we 'elke tijdseenheid'. Als er in seconden geteld wordt, moet je dus echt elke seconde tot die seconde dat je op wintersport gaat studeren. Als er in dagen geteld wordt, moet je dus elke dag studeren. Maar het is niet helemaal duidelijk of dat dan het hele etmaal moet zijn. De formule $S\,\mathcal{U}\,W$ is dan ook waar in x_i als op alle momenten $x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{j-1}$ de formule S waar is en in x_j de formule W waar is, waarbij $j \geq i$.

(c) Volgt volgens jou uit de zin dat je op de wintersport niet meer studeert? Leg uit waarom je interpretatie van de zin in dit opzicht klopt met je formule. (5 punten)

Het wordt wel gesuggereerd, maar het staat er niet echt. De formule $S\,\mathcal{U}\,W$ zegt er dan ook niets over. Over moment x_j (zie uitleg vorige onderdeel) is alleen maar geëist dat W waar is. Er wordt niets afgedwongen over het al dan niet waar zijn van S.

5. Deze opgave gaat over de LTL formule

$$\mathcal{F}(a \wedge b) \vee \mathcal{F}\neg a \vee \mathcal{G}\neg b$$

(a) Leg uit wat deze LTL formule betekent. (10 punten)

Er komt een moment dat a en b gelden (of a en b gelden nu al), of er komt een moment dat a niet geldt (of a geldt nu al niet), of vanaf nu (inclusief nu) geldt b nooit.

(b) Geef een LTL Kripke-model waarin deze formule waar is. Verklaar je antwoord. (10 punten)

$\mathcal{M}_5 = \langle W, R, V\rangle$, waarbij

$$\begin{array}{rcl} W & = & \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\} \\ R(x_i) & = & \{x_j \mid j \in \mathbb{N}, j \geq i\} \qquad \text{voor } i \in \mathbb{N} \\ V(x_i) & = & \emptyset \qquad \text{voor } i \in \mathbb{N} \end{array}$$

Omdat voor alle $i \in \mathbb{N}$ $x_i \nVdash b$, weten we dat $x_i \Vdash \mathcal{G}\neg b$ voor elke wereld x_i. Maar dan geldt wegens de $\vee$-tekens: $x_i \Vdash \mathcal{F}(a \wedge b) \vee \mathcal{F}\neg a \vee \mathcal{G}\neg b$, voor elke wereld x_i. En dus geldt $\mathcal{M}_5 \vDash \mathcal{F}(a \wedge b) \vee \mathcal{F}\neg a \vee \mathcal{G}\neg b$.

(c) Geef een definitie van logisch waar binnen LTL en leg uit of de gegeven formule daaraan voldoet of niet. (10 punten)

Een formule is logisch waar binnen LTL indien hij in elk model waar is.

Deze formule is logisch waar. Want stel maar eens dat er een model $\mathcal{M}'_5$ is waarin de formule niet waar is.

Dan moet er binnen dat model dus een wereld x_i zijn waarin $x_i \nVdash \mathcal{F}(a \wedge b)$, $x_i \nVdash \mathcal{F}\neg a$ en $x_i \nVdash \mathcal{G}\neg b$. Uit $x_i \nVdash \mathcal{F}\neg a$ volgt dat voor alle j met $j \geq i$ geldt $x_j \Vdash a$. Uit $x_i \nVdash \mathcal{G}\neg b$ volgt dat er k met $k \geq i$ is met $x_k \Vdash b$. Maar dan geldt $x_k \Vdash a \wedge b$ en dus ook $x_i \Vdash \mathcal{F}(a \wedge b)$. Tegenspraak, dus zo'n model bestaat niet.