Formeel Denken 2014
Uitwerkingen Inhaaltoets
(07/01/15)

1. Geef drie verschillende modellen waarin $a \to b \leftrightarrow c$ waar is. (15 punten)

   Om te kijken in welke modellen de formule waar is, is het handig om een waarheidstabel te maken. Uit de kolommen van de tabel volgt meteen de juiste parseervolgorde van de formule.

a	b	c	$a \to b$	$(a \to b) \leftrightarrow c$
0	0	0	1	0
0	0	1	1	1
0	1	0	1	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	1	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

   Hieruit volgt dat er vier modellen zijn waarin de formule waar is:

   - v_1 met $v_1(a) = 0$, $v_1(b) = 0$ en $v_1(c) = 1$
   - v_3 met $v_3(a) = 0$, $v_3(b) = 1$ en $v_3(c) = 1$
   - v_4 met $v_4(a) = 1$, $v_4(b) = 0$ en $v_4(c) = 0$
   - v_7 met $v_7(a) = 1$, $v_7(b) = 1$ en $v_7(c) = 1$

2. Vertaal de volgende Nederlandse zin naar een formule van de predikaatlogica met gelijkheid:

   Er is precies één man die van precies één vrouw houdt.

   Gebruik hierbij het woordenboek:

M	het domein van de mannen
V	het domein van de vrouwen
$H(x, y)$	x houdt van y

   (20 punten)

   We maken eerst een hulppredikaat $HPV(x)$ met de betekenis: x houdt van precies één vrouw.

   $$HPV(x) := \exists y \in V\, [H(x, y) \land \forall y \in V\, [H(x, z) \to z = y]]$$

   Dit predikaat gebruiken we dan twee keer in de formule voor de hele zin:

   $$\exists x \in M\, [HPV(x) \land \forall y \in M\, [HPV(y) \to y = x]]$$

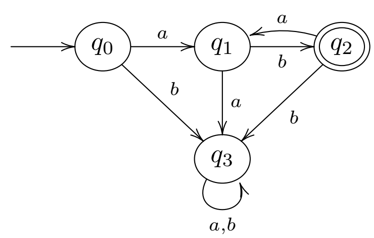
3. Geef een eindige automaat voor de taal

$$L_3 := \mathcal{L}((ab)^*) \cap \overline{\{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ bevat geen } b\}^*}$$

(20 punten)

- De taal $\mathcal{L}((ab)^*) = \{\lambda, ab, abab, ababab, \ldots\}$.
- De taal $\{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ bevat geen } b\} = \{\lambda, a, aa, aaa, \ldots\}$.
- De taal $\{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ bevat geen } b\}^* = \{\lambda, a, aa, aaa, \ldots\}$.
- De taal $\overline{\{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ bevat geen } b\}^*} = \{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ bevat een } b\}$.
- Maar dan is de gevraagde doorsnede de taal: $\{ab, abab, ababab, \ldots\}$.

Een automaat die deze taal accepteert is:



4. We willen laten zien dat de som van de graden van alle punten in een graaf altijd even is. Bewijs dit met inductie naar het aantal lijnen in de graaf.

(20 punten)

Propositie:

De som van de graden van een graaf met n lijnen is even, voor alle $n \geq 0$.

Bewijs met inductie naar n. 1

$P(n) :=$ De som van de graden van een graaf met n lijnen is even, 2

Basisstap. We laten zien dat $P(0)$ geldt, oftewel 3

de som van de graden van een graaf met 0 lijnen is even.

Dit is zo, want in een graaf met 0 lijnen, heeft elk punt graad 0. Dus de som van alle graden is ook 0. En 0 is even. 4

Inductiestap. Laat k een willekeurig getal zijn met $k \geq 0$. 5

Neem aan dat we al weten dat $P(k)$ geldt, oftewel 6
de som van de graden van een graaf met k lijnen is even. (inductiehypothese IH)

We laten zien dat $P(k+1)$ ook geldt, oftewel 7
de som van de graden van een graaf met $k+1$ lijnen is even.

Dit is zo, want zij G een graaf met $k+1$ lijnen en (p, q) één van de lijnen uit de graaf. Als we de lijn (p, q) weglaten, krijgen we een graaf G' met dezelfde punten en met bijna dezelfde lijnen. Alleen heeft G' nu k lijnen. Maar op grond van de inductiehypothese weten we dan dat de som van de graden in G' even is, dus zeg $2r$ voor zekere $r \in N$. Maar wegens de constructie volgt dan dat de som van de graden van G gelijk is aan $2r+1+1$, want zowel bij p als bij q is de graad in G precies één hoger. Dus de som van de graden in G is $2r+2 = 2(r+1)$ en in het bijzonder dus ook even. 8

Dus volgt met inductie dat $P(n)$ geldt voor alle $n \geq 0$. 9

5. Geef een LTL formule die de volgende eigenschap formaliseert, en verklaar je antwoord:

   a wordt eerder waar dan b

   Preciezer: a en b zijn allebei minstens één keer waar (maar hoeven als ze waar zijn niet waar te blijven), en het moment waarop a voor het eerst waar is, is strikt eerder dan het moment waarop b voor het eerst waar is.
   (15 punten)

$$(\neg a \wedge \neg b) \,\mathcal{U}\, (a \wedge \neg b \wedge \mathcal{F} b)$$

Het tweede deel van deze formule zegt dat $a \wedge \neg b \wedge \mathcal{F} b$ ooit waar zal zijn. Dus er komt een moment waarop a wel waar, is, b niet, maar b daarna wel een keer waar wordt. Die $\mathcal{F} b$ zegt dat b ook tegelijk met a waar mag zijn, maar dat wordt expliciet uitgesloten door de $\neg b$. Het eerste deel van de formule voorkomt dat er misschien wel een keer eerder een moment is waarop b waar wordt. Als we bijvoorbeeld alleen $\mathcal{F}(a \wedge \neg b \wedge \mathcal{F} b)$ hadden geschreven, was dat niet uitgesloten geweest.