Formeel Denken 2015
Uitwerkingen Toets 2: Predikaatlogica
(23/09/15)

In de eerste twee opgaven gebruiken we de volgende interpretatie:

M	het domein van de mannen
V	het domein van de vrouwen
k	Koos
j	Joris
$L(x,y)$	x is langer dan y

1. Geef voor ieder van de volgende Nederlandse zinnen een formule van de predikaatlogica met gelijkheid die zo precies mogelijk de betekenis van die zin formaliseert:

   (a) *Koos en Joris zijn even lang.* (10 punten)

   $$(\neg L(k,j) \wedge \neg L(j,k))$$

   (b) *Mannen zijn geen vrouwen.* (10 punten)

   $$(\forall m \in M \neg (\exists v \in V \ (m = v)))$$

   (c) *Er is precies één man die langer is dan Koos.* (10 punten)

   $$(\exists m \in M \ (L(m,k) \wedge (\forall n \in M \ (L(n,k) \to (m = n)))))$$

   (d) *De langste man is langer dan de langste vrouw.* (10 punten)

   $$(\forall m \in M \ (\neg (\exists n \in M \, L(n,m)) \to (\forall v \in V \ (\neg (\exists w \in V \, L(w,v)) \to L(m,v)))))$$

2. Beschouw de volgende formule van de predikaatlogica:

   $$\forall x, y \in V \, [x \neq y \to L(x,y) \vee L(y,x)]$$

   (a) Schrijf deze formule volgens de officiële grammatica uit de syllabus. (10 punten)

   $$(\forall x \in V \ (\forall y \in V \ (\neg (x = y) \to (L(x,y) \vee L(y,x)))))$$

(b) Geef een Nederlandse zin die de betekenis van deze formule zo precies mogelijk omschrijft. (15 punten)

Voor elke twee willekeurige vrouwen geldt dat de ene langer is dan de andere, of andersom.

(Eigenlijk hoort hier nog een 'of allebei' bij, maar omdat beide situaties elkaar tegenspreken heeft dat deel weinig toegevoegde waarde en laten we het weg.)

3. In de propositielogica kennen we $\models f$, $f \models g$ en $f \equiv g$. In het dictaat zijn voor de predikaatlogica alleen de eerste twee gedefinieerd. Geef nu een definitie van $f \equiv g$ voor predikaatlogica die aansluit bij die twee bestaande definities. (15 punten)

De bewering $f \equiv g$ betekent dat f en g logisch equivalent zijn. Er zijn tenminste drie mogelijke correcte antwoorden op deze opgave:

- De bewering kan eenvoudig worden gedefinieerd via de reeds bekende definitie van logisch waar:

  $$f \equiv g \text{ dan en slechts dan als } \models f \leftrightarrow g$$

  Dit correspondeert met opgave 1.H bij propositielogica in het dictaat.

- Ook kan de bewering worden gedefinieerd in termen van logisch gevolg:

  $$f \equiv g \text{ dan en slechts dan als } f \vDash g \text{ en } g \vDash f$$

- Tenslotte kan de definitie ook direct worden gegeven in termen van modellen en interpretaties: $f \equiv g$ dan en slechts dan als f en g onder precies dezelfde modellen en interpretaties waar zijn.

4. Geef een interpretatie I_4 in een model M_4 waaronder de volgende formule waar is:

$$(\forall x \in D\,((\exists y \in D\,\neg R(x,y)) \land ((\exists y \in D\,R(x,y)) \to (\forall y \in D\,R(x,y)))))$$

Verklaar je antwoord. (10 punten)

Deze formule betekent:

Voor elke x in D geldt
    er is een y in D zodat $R(x,y)$ niet geldt
  en
    als er een y in D is waarvoor $R(x,y)$ wel geldt,
    dan geldt $R(x,y)$ voor alle y in D.

Er zijn twee manieren om deze formule waar te maken:

- Als D de lege verzameling is, dan hebben we een voor-alle-bewering over een lege verzameling en die zijn altijd waar.

- Als R een relatie is die nooit waar is.

Hieronder een concreet voorbeeld van de tweede optie.

Zij x een willekeurig element uit D. Als de bewering waar is voor deze x moeten de delen voor en na de $\wedge$ allebei waar zijn. Dat eerste kan maar op één manier, namelijk doordat D daadwerkelijk voor deze x een y bevat waarvoor $R(x, y)$ niet geldt. Het tweede is een als-dan-bewering en die is waar als het als-deel onwaar is of als het dan-deel waar is. Maar als het dan-deel waar is, is er een tegenspraak met het deel voor de $\wedge$. Dus moeten we proberen het tweede deel waar te krijgen door het als-deel onwaar te maken. Dat kan door een model en interpretatie te kiezen zodat er geen y in D is met $R(x, y)$.

Neem als model M_4

Domein(en)	Deelverzamelingen van natuurlijke getallen
Relatie(s)	kleiner dan (<)

en als interpretatie I_4

D	$\{1\}$
$R(x, y)$	$x < y$

Hieruit volgt

$$(M_4, I_4) \models (\exists y \in D \, \neg R(1, y))$$

want kies maar $y = 1$: $1 < 1$ geldt inderdaad niet. Verder weten we

$$(M_4, I_4) \not\models (\exists y \in D \, R(1, y))$$

want de enige kandidaat voor y is $y = 1$ en $1 < 1$ geldt niet. Dus

$$(M_4, I_4) \models ((\exists y \in D \, R(1, y)) \rightarrow (\forall y \in D \, R(1, y)))$$

op grond van de definitie van de implicatie. En dus

$$(M_4, I_4) \models ((\exists y \in D \, \neg R(1, y)) \wedge ((\exists y \in D \, R(1, y)) \rightarrow (\forall y \in D \, R(1, y))))$$

Maar omdat 1 het enige element van D is volgt hieruit:

$$(M_4, I_4) \models (\forall x \in D \, ((\exists y \in D \, \neg R(x, y)) \wedge ((\exists y \in D \, R(x, y)) \rightarrow (\forall y \in D \, R(x, y)))))$$