Berekenbaarheid 2005, Toets 3

vrijdag 13 mei, 11.45–12.30

Er zijn 3 onderdelen die ieder 3 punten opleveren, 1 punt is gratis.

1. Laat $\rightarrow\boxed{F}\rightarrow$ een Turing machine zijn die een *totale* functie f van type $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ berekent. Dat wil zeggen dat hij één argument n in de vorm $\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B\ldots$ op de tape verwacht, en dat hij termineert voor iedere waarde van deze input n.

   Gebruik deze machine samen met de macros op pagina 2 om een Turing machine te definiëren die het kleinste getal $n \in \mathbb{N}$ op de tape schrijft waarvoor $f(n) = 0$, tenminste indien zo'n getal bestaat, en die niet termineert indien zo'n getal niet bestaat. Deze te definiëren machine wordt geëxecuteerd met als input een blanco tape.

2. Beschrijf de functie $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ die wordt gegeven als de volgende compositie:

$$g \quad = \quad p_1^{(2)} \circ (s \circ p_1^{(2)}, e \circ p_2^{(2)})$$

   (Ter herinnering: s is de successor, en e is de *lege* functie die ongedefinieerd is voor iedere input, dus $e(n)\uparrow$ voor iedere n.)

3. Bewijs dat er geen algoritme is dat beslist of een willekeurige Turing machine M termineert voor *enige* input ter lengte 1 (dat wil zeggen: een string bestaande uit één enkel symbool.)

   Dus als het input alfabet $\{0, 1\}$ is: de code R(M) wordt geaccepteerd als $M(0)\downarrow$ of $M(1)\downarrow$, en wordt verworpen als zowel $M(0)\uparrow$ als $M(1)\uparrow$.

$\to\boxed{\mathrm{S}}\to$

$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\quad BB$

$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n+1}\,B$

$\to\boxed{\mathrm{Z}}\to$

$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\qquad B$

$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{0}\,B\ldots B$

$\to\boxed{\mathrm{E}}\to$

$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B$

termineert niet

$\to\boxed{\mathrm{P}_i^{(k)}}\to$

$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B$

$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_i}\;B\ldots\quad\ldots B$

$\to\boxed{\mathrm{C}_m^{(k)}}\to$

$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B$

$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{m}\;B\ldots\quad\ldots B$

in het bijzonder:

$\to\boxed{\mathrm{C}_0^{(0)}}\to$

$\underset{\uparrow}{B}BB$

$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{0}\,B$

$\to\boxed{\mathrm{A}}\to$

$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B\,\overline{m}\quad B$

$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n+m}\,BB$

$\to\boxed{\mathrm{D}}\to$

$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\qquad B$

$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n \dot{-} 1}\,BB$

$\to\boxed{\mathrm{MR}_k}\to$

$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B$

$B\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,\underset{\uparrow}{B}$

$\to\boxed{\mathrm{ML}_k}\to$

$B\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,\underset{\uparrow}{B}$

$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B$

$\to\boxed{\mathrm{FR}}\to$

$\underset{\uparrow}{B}B^i\,\overline{n}\,B \qquad (i \geq 0)$

$B^i\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B$

$\to\boxed{\mathrm{FL}}\to$

$B\,\overline{n}\,B^i\underset{\uparrow}{B} \qquad (i \geq 0)$

$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B^iB$

$\to\boxed{\mathrm{E}_k}\to$

$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B$

$\underset{\uparrow}{B}\ldots\qquad\ldots B$

$\to\boxed{\mathrm{T}}\to$

$\underset{\uparrow}{B}B^i\,\overline{n}\,B \qquad (i \geq 0)$

$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B^iB$

$\to\boxed{\mathrm{INT}}\to$

$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B\,\overline{m}\,B$

$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{m}\,B\,\overline{n}\,B$

$\to\boxed{\mathrm{MULT}}\to$

$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B\,\overline{m}\,B\ldots$

$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n\cdot m}\,B\ldots$

$\to\boxed{\mathrm{CPY}_k}\to$

$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B\ldots\qquad\ldots B$

$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B$

$\to\boxed{\mathrm{CPY}_{k,i}}\to$

$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B\,\overline{n_{k+1}}\,B\ldots B\,\overline{n_{k+i}}\,B\ldots\qquad\ldots B$

$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B\,\overline{n_{k+1}}\,B\ldots B\,\overline{n_{k+i}}\,B\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B$

$\to\boxed{\mathrm{BRN}}\xrightarrow{n=0}$; $\boxed{\mathrm{BRN}}\downarrow{\scriptstyle n>0}$

$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B$

$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B$