Berekenbaarheid 2005, Toets 4

vrijdag 3 juni, 11.45–12.30

Er zijn 3 opgaven die ieder 3 punten opleveren, 1 punt is gratis. In de opgaven mag je gebruik maken van het feit dat de functies in het lijstje op pagina 2 primitief recursief zijn.

1. a) Laat zien dat de functie $\mathsf{sqrt} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gedefinieerd door

$$\mathsf{sqrt}(x) = \begin{cases} y & \text{als } x = y^2 \\ \uparrow & \text{als } x \text{ geen kwadraat is} \end{cases}$$

   μ-recursief is.

   Dus $\mathsf{sqrt}(0) = 0$, $\mathsf{sqrt}(1) = 1$, $\mathsf{sqrt}(2)\uparrow$, $\mathsf{sqrt}(3)\uparrow$, $\mathsf{sqrt}(4) = 2$, $\mathsf{sqrt}(5)\uparrow$, etc.

   b) Laat zien dat de functie $\mathsf{sqrt}' : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gedefinieerd door

$$\mathsf{sqrt}'(x) = \lfloor\sqrt{x}\rfloor$$

   primitief recursief is. (Hierin betekent $\lfloor\ \rfloor$ 'afronden naar beneden'.)

   Dus $\mathsf{sqrt}'(0) = 0$, $\mathsf{sqrt}'(1) = 1$, $\mathsf{sqrt}'(2) = 1$, $\mathsf{sqrt}'(3) = 1$, $\mathsf{sqrt}'(4) = 2$, $\mathsf{sqrt}'(5) = 2$, etc.

2. Een *priemtweeling* is een paar priemgetallen die precies 2 verschillen. De priemtweelingen zijn dus: $(3, 5)$, $(5, 7)$, $(11, 13)$, $(17, 19)$, etc. (Het is onbekend of er oneindig veel priemtweelingen bestaan.)

   a) Laat zien dat de functie $\mathsf{next\_pt} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gedefinieerd door

$$\mathsf{next\_pt}(x) = \text{de kleinste } p > x \text{ met } (p, p+2) \text{ een priemtweeling}$$

   een μ-recursieve functie is.

b) Laat hiermee zien dat ook de functie $\mathsf{pt} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gedefinieerd door

$$\mathsf{pt}(y) = \text{de } p \text{ van de } y\text{-de priemtweeling } (p, p+2)$$

een μ-recursieve functie is.

Dus $\mathsf{pt}(0) = 3$, $\mathsf{pt}(1) = 5$, $\mathsf{pt}(2) = 11$, $\mathsf{pt}(3) = 17$, etc. (Zie het lijstje priemtweelingen hierboven.)

3. Definieer een primitief recursieve functie $\mathsf{cdr} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, die van een Gödel-gecodeerd rijtje het eerste element verwijdert.

   Bijvoorbeeld: het rijtje $\langle 2, 3, 1\rangle$ heeft als Gödel-getal $2^{2+1} \cdot 3^{3+1} \cdot 5^{1+1} = 8 \cdot 81 \cdot 25 = 16200$, en het rijtje $\langle 3, 1\rangle$ heeft als Gödel-getal $2^{3+1} \cdot 3^{1+1} = 16 \cdot 9 = 144$. Dus moet er gelden dat:

$$\mathsf{cdr}(16200) = 144$$

   Als het argument van cdr niet het Gödel-getal van een rijtje is, of als het het Gödel-getal van het lege rijtje is (dat is het getal 1) zodat er niets is om te verwijderen, dan maakt het niet uit wat je uit de functie die je definieert laat komen.

Primitief recursieve functies

$$\begin{aligned}
c_n^{(1)}(x) &= n \\
\mathsf{add}(x,y) &= x + y \\
\mathsf{mult}(x,y) &= x \cdot y \\
\mathsf{sub}(x,y) &= x \dot{-} y \\
\mathsf{pred}(y) &= y \dot{-} 1 \\
\mathsf{exp}(x,y) &= x^y \\
\mathsf{sg}(x) &= \text{als } x \neq 0 \text{ dan 1 anders 0} \\
\mathsf{cosg}(x) &= \text{als } x \neq 0 \text{ dan 0 anders 1} \\
\mathsf{lt}(x,y) &= \text{als } x < y \text{ dan 1 anders 0} \\
\mathsf{gt}(x,y) &= \text{als } x > y \text{ dan 1 anders 0} \\
\mathsf{le}(x,y) &= \text{als } x \leq y \text{ dan 1 anders 0} \\
\mathsf{ge}(x,y) &= \text{als } x \geq y \text{ dan 1 anders 0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathsf{eq}(x,y) &= \text{als } x = y \text{ dan 1 anders 0} \\
\mathsf{ne}(x,y) &= \text{als } x \neq y \text{ dan 1 anders 0} \\
\mathsf{max}(x,y) &= \text{het maximum van } x \text{ en } y \\
\mathsf{min}(x,y) &= \text{het minimum van } x \text{ en } y \\
\mathsf{div}(x,y) &= \text{als } y \neq 0 \text{ dan } \lfloor x/y \rfloor \text{ anders } \uparrow \\
\mathsf{quo}(x,y) &= \text{als } y \neq 0 \text{ dan } \lfloor x/y \rfloor \text{ anders 0} \\
\mathsf{rem}(x,y) &= \text{als } y \neq 0 \text{ dan } x \bmod y \text{ anders } x \\
\mathsf{divides}(x,y) &= \text{als } y \neq 0 \text{ en } y \,|\, x \text{ dan 1 anders 0} \\
\mathsf{even}(x) &= \text{als } x \text{ even is dan 1 anders 0} \\
\mathsf{prime}(x) &= \text{als } x \text{ priem is dan 1 anders 0} \\
\mathsf{pn}(x) &= \text{het } x\text{-de priemgetal} \\
& \text{(dus } \mathsf{pn}(0) = 2,\ \mathsf{pn}(1) = 3, \text{ etc.)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathsf{gn}_n(x_0, \ldots, x_n) &= \text{Gödel-getal van het rijtje } \langle x_0, \ldots, x_n \rangle \\
& \text{(een aparte functie voor iedere } n\text{, dus } n \text{ is geen argument!)} \\
\mathsf{dec}(i,x) &= \text{`}i\text{-de element in het rijtje bij het Gödel-getal } x\text{'} \\
\mathsf{gdln}(x) &= \text{`lengte van het rijtje bij het Gödel-getal } x\text{'}
\end{aligned}$$