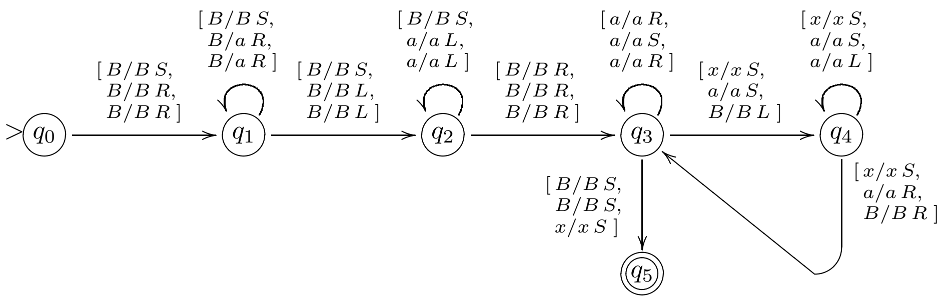
Berekenbaarheid 2005, Uitwerking toets 2

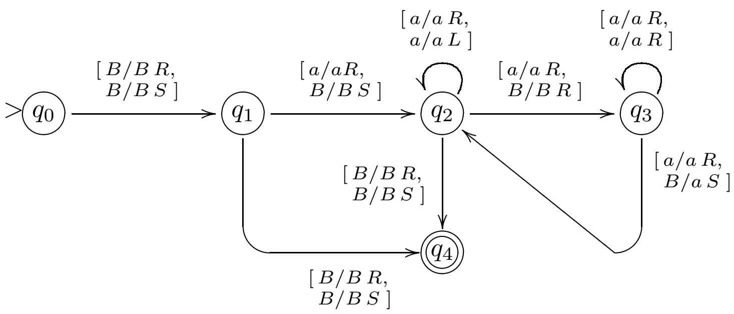
1. De strategie: schrijf eerst non-deterministich de wortel van n op de tweede en derde tape, en gebruik dan de positie van de koppen op die twee tapes als de variabelen in twee geneste loops.

   In deze machine is $x \in \{B, a\}$:

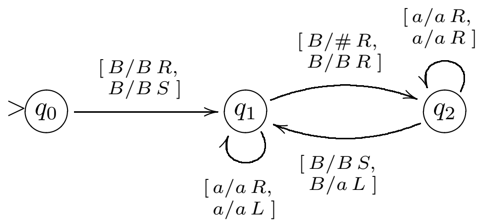
   Het non-determinisme is dus dat er in toestand q_1 twee verschillende transities zijn, voor als er op alle drie de tapes de kop op een blank staat.

   Opmerking: Georges Gonthier, een gast die ons instituut bezocht ten tijde dat deze toets werd gemaakt, merkte op dat je ook wel een *deterministische* machine met maar *twee* tapes kan maken, die dan toch zo'n rijtje ter lengte van een kwadraat in de minimale tijd van $n+1$ stappen herkent (hij loopt namelijk bij iedere stap één plaats op de eerste tape naar rechts):

   Dit soort subtiliteit is natuurlijk niet nodig voor een correct antwoord.

2.



3. We moeten laten zien dat als L_1 en L_2 recursieve talen zijn, dat dan ook $L_1 \cap L_2$ recursief is.

   Omdat L_1 en L_2 recursief zijn, zijn er 1-tape Turing machines M_1 en M_2 die deze talen herkennen en die voor iedere input stoppen. Definieer een 2-tape Turing machine M die het volgende doet:

   (i) Kopieer de input van tape 1 naar tape 2 en spoel beide tapes terug naar het begin.

   (ii) Doe M_1 op tape 1, waarbij je de kop van tape 2 op het beginvakje stil laat staan. Als M_1 de input niet accepteert, accepteert M ook de input niet. Ga anders door met de volgende stap.

   (iii) Doe M_2 op tape 2, waarbij je de kop van tape 1 laat staan waar hij staat. Als M_2 de input accepteert, accepteert M de input ook. Als M_2 de input niet accepteert, accepteert M de input ook niet.

   Dan accepteert de Turing machine M de taal $L_1 \cap L_2$, en stopt M voor iedere input. Dus is $L_1 \cap L_2$ ook recursief.