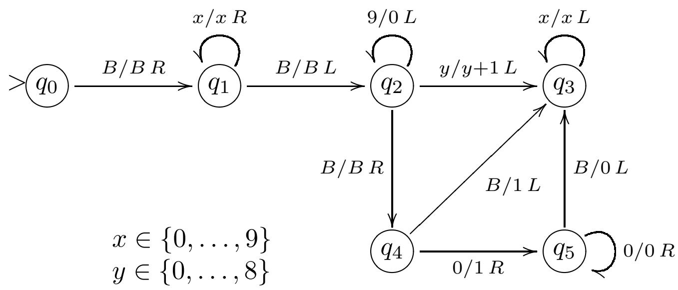
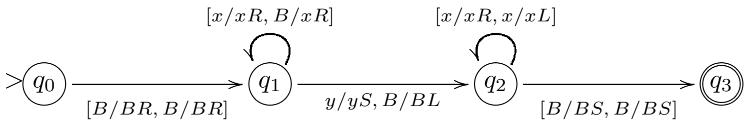
Berekenbaarheid 2006, Uitwerking toets 1

1.



$x \in \{0, \ldots, 9\}$
$y \in \{0, \ldots, 8\}$

2.



$x \in \{a, b\}$
$y \in \{a, b, B\}$

3. De informele variant van het bewijs (dit levert al de volle 3 punten op):

($\Rightarrow$) We moeten laten zien dat een taal die een Turing machines met terugspoelen herkent altijd recursief opsombaar is.

Laat gegeven zijn een Turing machine met terugspoelen M die een taal L herkent. We maken hierbij nu een twee-tape Turing machine M' die dezelfde taal herkent. Hieruit volgt dat de taal L recursief opsombaar is.

De machine M' is eigenlijk een twee-sporen machine. We nemen evenwel een meer-tape machine omdat we dan ook stationaire transities mogen gebruiken, wat makkelijker is (de koppen op beide tapes bewegen dus synchroon.) De tweede tape dient uitsluitend om het begin van de tape te markeren, doordat er een # op het nulde vakje is geschreven.

Om M' uit M te maken, voeg voor de begintoestand nog een extra transitie toe (om de # op de tweede tape te schrijven):

$$>q_0 \qquad \longrightarrow \qquad >q_{-1} \xrightarrow[{[B/BS,\, B/\#S]}]{} q_0$$

voeg in de terugspoel transities van M een extra tussen-toestand toe, waarbij $x \in \Gamma$ en $y \in \{B, \#\}$:

$$\begin{tikzcd} q_i \arrow[r, "a/b\,O"'] & q_j & \longrightarrow & q_j \arrow[r, "{[a/bS,\, y/yS]}"'] & q'_j \arrow[loop above, "{[x/xL,\, B/BL]}"] \arrow[r, "{[x/xS,\, \#/\#S]}"'] & q_j \end{tikzcd}$$

en zorg ervoor dat de 'normale' transities de tweede tape laten meebewegen:

$$q_i \xrightarrow[a/b\,L]{} q_j \qquad \longrightarrow \qquad q_j \xrightarrow[{[a/bL,\, y/yL]}]{} q_j$$

$$q_i \xrightarrow[a/b\,R]{} q_j \qquad \longrightarrow \qquad q_j \xrightarrow[{[a/bR,\, y/yR]}]{} q_j$$

(Merk op dat als er meerdere O-transities naar q_j zijn, dat in M' die allemaal dezelfde q'_j kunnen gebruiken. Controleer ook dat als M deterministisch is, dat M' dan ook deterministisch is.)

($\Leftarrow$) We moeten laten zien dat iedere recursief opsombare taal door een Turing machine met terugspoelen te herkennen is. Maar dat is flauw: een recursief opsombare taal wordt per definitie door een standaard Turing machine herkend, en dat is tevens een Turing machine met terugspoelen want je *hoeft* de O-transities niet te gebruiken.

De formeel preciese manier om de transformatie uit de eerste helft het bewijs op te schrijven (voor wie nieuwsgierig is naar hoe dat gaat):

Laat

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$$

de gegeven Turing machine met terugspoelen zijn. Definieer nu

$$\begin{aligned} Q' &= \{q_{-1}\} \cup \{q_i, q'_i \mid q_i \in Q\} \\ \Gamma' &= \Gamma \cup \{\#\} \end{aligned}$$

en laat δ' gegeven zijn door:

$$
\begin{array}{llll}
\delta'(q_{-1}, B, B) & = [q_0; B, S; \#, S] & & \\
\delta'(q_i, a, y) & = [q'_j; b, S; y, S] & \text{als} & \delta(q_i, a) = [q_j, b, O] \\
\delta'(q_i, a, y) & = [q_j; b, L; y, L] & \text{als} & \delta(q_i, a) = [q_j, b, L] \\
\delta'(q_i, a, y) & = [q_j; b, R; y, R] & \text{als} & \delta(q_i, a) = [q_j, b, R] \\
\delta'(q'_j, x, B) & = [q'_j; x, L; B, L] & & \\
\delta'(q'_j, x, \#) & = [q_j; x, S; \#, S] & &
\end{array}
$$

waarbij $x \in \Gamma$ en $y \in \{B, \#\}$, en δ' niet gedefinieerd in de overige gevallen. Dan is

$$M' = (Q', \Sigma, \Gamma', \delta', q_{-1}, F)$$

de twee-tape machine die dezelfde taal als M herkent.