Berekenbaarheid 2007, tentamen

woensdag 27 juni, 10.30–12.30

Er zijn negen opgaven die ieder tien punten opleveren. Tien punten zijn gratis, en het eindcijfer is het aantal punten gedeeld door tien.

1. Definieer (door het tekenen van een toestandsdiagram) een standaard Turing machine met input alfabet $\Sigma = \{a, b\}$ die zijn input er achterstevoren achterzet. Zorg er voor dat deze machine bij input w termineert in de toestand $\underset{\uparrow}{B}ww^RB\ldots$

2. Definieer (door het tekenen van een toestandsdiagram) een non-deterministische 2-tape Turing machine met input alfabet $\Sigma = \{a, b, c\}$ die de taal

$$L := \{u_1cvcu_2cvcu_3 \mid u_1, u_2, u_3 \in \{a, b, c\}^*, v \in \{a, b\}^*\}$$

   herkent. Zorg ervoor dat een correcte input w wordt geaccepteerd in minder dan $2|w| + 3$ stappen.

3. Definieer met behulp van de macro's op pagina 3 een Turing machine die de numerieke functie

$$f(n) = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$$

   berekent. (De notatie $\lfloor\ \rfloor$ betekent 'naar beneden afronden'.)

4. Schrijf de functie

$$e(x, y) = x^2 + y^2 - xy$$

   als compositie van functies uit de lijst op pagina 4.

5. De functie $d(n)$ die de 'driehoeksgetallen' berekent kan met primitieve recursie gedefinieerd worden door

$$\begin{aligned} d(0) &= 0 \\ d(n+1) &= d(n) + n + 1 \end{aligned}$$

   Laat zien hoe dit een instantie is van het schema van primitieve recursie. Schrijf d in de vorm $d = \mathsf{primrec}(g, h)$ waarbij g en h composities zijn van functies uit de lijst op pagina 4.

6. Laat zien dat de functie

$$k(n) = \begin{cases} 1 & \text{als er priemgetallen } p_1 \text{ en } p_2 \text{ bestaan met } p_2 - p_1 = n \\ \uparrow & \text{anders} \end{cases}$$

   μ-recursief is.

7. Geef de definitie van het begrip 'recursieve taal'.

8. Laat zien dat er een taal bestaat die niet recursief is.

9. Laat zien dat het niet beslisbaar is of een gegeven Turing machine met tape alfabet $\Gamma = \{a, b, c, B\}$ met als input een blank tape ooit een c op de tape zal schrijven.

S	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\quad BB$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n+1}\,B$
Z	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\qquad B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{0}\ldots B$
E	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B$	*termineert niet*
$\mathrm{P}_i^{(k)}$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_i}\;\;B\ldots\quad\ldots B$
$\mathrm{C}_m^{(k)}$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{m}\;\;B\ldots\quad\ldots B$
A	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B\,\overline{m}\quad B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n+m}\,BB$
D	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\qquad\quad B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n\dot{-}1}\ldots B$
SUB	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B\,\overline{m}\qquad B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n\dot{-}m}\ldots\;B$
MR_k	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B$	$B\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,\underset{\uparrow}{B}$
ML_k	$B\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,\underset{\uparrow}{B}$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B$
FR	$\underset{\uparrow}{B}B^i\,\overline{n}\,B\qquad(i\geq 0)$	$B^i\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B$
FL	$B\,\overline{n}\,B^i\underset{\uparrow}{B}\qquad(i\geq 0)$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B^iB$
E_k	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B$	$\underset{\uparrow}{B}\ldots\qquad\qquad\ldots B$
T	$\underset{\uparrow}{B}B^i\,\overline{n}\,B\qquad(i\geq 0)$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B^iB$
INT	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B\,\overline{m}\,B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{m}\,B\,\overline{n}\,B$
MULT	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B\,\overline{m}\,B\ldots$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n\cdot m}\,B\ldots$
CPY_k	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B\ldots\qquad\quad\ldots B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B$
$\mathrm{CPY}_{k,i}$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B\,\overline{n_{k+1}}\,B\ldots B\,\overline{n_{k+i}}\,B\ldots\qquad\quad\ldots B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B\,\overline{n_{k+1}}\,B\ldots B\,\overline{n_{k+i}}\,B\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B$
BRN ($n=0$; $n>0$)	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{id}(x) &= x \\
z(x) &= 0 \\
s(x) &= x+1 \\
p_i^{(k)}(x_1,\ldots,x_k) &= x_i \\
c_n^{(k)}(x_1,\ldots,x_k) &= n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{pred}(y) &= y \mathbin{\dot{-}} 1 \\
\mathsf{add}(x,y) &= x+y \\
\mathsf{mult}(x,y) &= x \cdot y \\
\mathsf{sub}(x,y) &= x \mathbin{\dot{-}} y \\
\mathsf{exp}(x,y) &= x^y \\
\mathsf{sg}(x) &= \text{als } x \neq 0 \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{cosg}(x) &= \text{als } x \neq 0 \text{ dan } 0 \text{ anders } 1 \\
\mathsf{lt}(x,y) &= \text{als } x < y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{gt}(x,y) &= \text{als } x > y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{le}(x,y) &= \text{als } x \leq y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{ge}(x,y) &= \text{als } x \geq y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{eq}(x,y) &= \text{als } x = y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{ne}(x,y) &= \text{als } x \neq y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{max}(x,y) &= \text{het maximum van } x \text{ en } y \\
\mathsf{min}(x,y) &= \text{het minimum van } x \text{ en } y \\
\mathsf{quo}(x,y) &= \text{als } y \neq 0 \text{ dan } \lfloor x/y \rfloor \text{ anders } 0 \\
\mathsf{rem}(x,y) &= \text{als } y \neq 0 \text{ dan } x \bmod y \text{ anders } x \\
\mathsf{divides}(x,y) &= \text{als } y \neq 0 \text{ en } y \mid x \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{even}(x) &= \text{als } x \text{ even is dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{prime}(x) &= \text{als } x \text{ priem is dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{pn}(x) &= \text{het } x\text{-de priemgetal} \\
& \text{(dus } \mathsf{pn}(0) = 2,\ \mathsf{pn}(1) = 3, \text{ etc.)}
\end{aligned}
$$