Berekenbaarheid 2008, tentamen

dinsdag 19 augustus, 10.30–12.30

Er zijn 9 onderdelen die ieder 1 punt opleveren (1 punt is gratis). NB: Bij het 'definiëren' van een Turing machine moet je deze geven door middel van een toestandsdiagram. Succes!

1. Definieer een standaard Turing machine met input alfabet $\Sigma = \{a, b\}$ die zijn input verdubbelt. Dus bij input u moet de output uu zijn.

2. Definieer een non-deterministische 2-tape Turing machine die de volgende taal herkent:

$$L_2 = \left\{u_1cvcv^Rcu_2 \mid u_1, u_2, v \in \{a, b\}^*\right\}$$

   Deze machine moet een input $w \in L_2$ herkennen in ten hoogste $|w| + 1$ stappen.

3. Laat zien dat iedere recursief opsombare taal wordt herkend door een Turing machine die na de eerste transitie nooit meer in zijn begintoestand terugkomt.

4. Definieer een macro $\rightarrow \boxed{\text{MAX}} \rightarrow$ die de max functie uitrekent:

$$\mathsf{max}(x, y) = \begin{cases} x & \text{als } x \geq y \\ y & \text{als } x < y \end{cases}$$

   Je mag voor het maken van deze macro gebruik maken van alle macro's op pagina 3.

5. Wat is het halting probleem? En waarom is het interessant?

6. Laat zien dat het onbeslisbaar is of een machine met een gegeven input na de eerste transitie ooit weer in zijn begintoestand terugkomt.

7. Geef een voorbeeld van twee totale functies f en g zodat:

$$f \circ g \neq g \circ f$$

   Verklaar je antwoord.

8. We definiëren een functie f_8 met primitieve recursie door:

$$f_8(x, y) = \begin{cases} x & \text{als } y = 0 \\ [f_8(x, y-1)]^2 & \text{als } y > 0 \end{cases}$$

   Geef de waarde van $f_8(2, 3)$.

   We willen schrijven $f_8 = \mathsf{primrec}(g_8, h_8)$. Geef primitief recursieve functies g_8 en h_8 waarvoor dit geldt. Je mag gebruiken dat de functies op pagina 4 primitief recursief zijn.

9. We definiëren een functie f_9 door

$$f_9(x) = \mu y \leq x.\ (\mathsf{ge}(y, x \dot{-} 1) \cdot \mathsf{prime}(y))$$

   Geef de waarde van $f_9(0)$ tot en met $f_9(12)$.

$\to\boxed{\mathrm{S}}\to$

$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\quad BB$

$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n+1}\,B$

$\to\boxed{\mathrm{Z}}\to$

$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\quad B$

$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{0}\ldots B$

$\to\boxed{\mathrm{E}}\to$

$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B$

termineert niet

$\to\boxed{\mathrm{P}_i^{(k)}}\to$

$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B$

$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_i}\;\;B\ldots\;\;\ldots B$

$\to\boxed{\mathrm{C}_m^{(k)}}\to$

$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B$

$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{m}\;\;B\ldots\;\;\ldots B$

$\to\boxed{\mathrm{A}}\to$

$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B\,\overline{m}\quad B$

$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n+m}\,BB$

$\to\boxed{\mathrm{D}}\to$

$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\qquad B$

$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n\dot{-}1}\ldots B$

$\to\boxed{\mathrm{SUB}}\to$

$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B\,\overline{m}\quad B$

$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n\dot{-}m}\,\ldots B$

$\to\boxed{\mathrm{MULT}}\to$

$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B\,\overline{m}\,B\ldots$

$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n\cdot m}\,B\ldots$

$\to\boxed{\mathrm{MR}_k}\to$

$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B$

$B\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,\underset{\uparrow}{B}$

$\to\boxed{\mathrm{ML}_k}\to$

$B\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,\underset{\uparrow}{B}$

$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B$

$\to\boxed{\mathrm{FR}}\to$

$\underset{\uparrow}{B}\,B^i\,\overline{n}\,B\qquad(i\geq 0)$

$B^i\,\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B$

$\to\boxed{\mathrm{FL}}\to$

$B\,\overline{n}\,B^i\,\underset{\uparrow}{B}\qquad(i\geq 0)$

$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B^i B$

$\to\boxed{\mathrm{E}_k}\to$

$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B$

$\underset{\uparrow}{B}\ldots\qquad\ldots B$

$\to\boxed{\mathrm{T}}\to$

$\underset{\uparrow}{B}\,B^i\,\overline{n}\,B\qquad(i\geq 0)$

$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B^i B$

$\to\boxed{\mathrm{INT}}\to$

$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B\,\overline{m}\,B$

$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{m}\,B\,\overline{n}\,B$

$\to\boxed{\mathrm{CPY}_k}\to$

$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B\ldots\qquad\ldots B$

$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B$

$\to\boxed{\mathrm{CPY}_{k,i}}\to$

$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B\,\overline{n_{k+1}}\,B\ldots B\,\overline{n_{k+i}}\,B\ldots\qquad\ldots B$

$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B\,\overline{n_{k+1}}\,B\ldots B\,\overline{n_{k+i}}\,B\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B$

$\to\boxed{\mathrm{BRN}}\xrightarrow{n=0}$, $\downarrow n>0$

$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B$

$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{id}(x) &= x\\
z(x) &= 0\\
s(x) &= x+1\\
p_i^{(k)}(x_1,\ldots,x_k) &= x_i\\
c_n^{(k)}(x_1,\ldots,x_k) &= n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{pred}(y) &= y \mathbin{\dot{-}} 1\\
\mathsf{add}(x,y) &= x+y\\
\mathsf{mult}(x,y) &= x\cdot y\\
\mathsf{sub}(x,y) &= x \mathbin{\dot{-}} y\\
\mathsf{exp}(x,y) &= x^y\\
\mathsf{sg}(x) &= \text{als } x\neq 0 \text{ dan } 1 \text{ anders } 0\\
\mathsf{cosg}(x) &= \text{als } x\neq 0 \text{ dan } 0 \text{ anders } 1\\
\mathsf{lt}(x,y) &= \text{als } x< y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0\\
\mathsf{gt}(x,y) &= \text{als } x> y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0\\
\mathsf{le}(x,y) &= \text{als } x\leq y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0\\
\mathsf{ge}(x,y) &= \text{als } x\geq y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{eq}(x,y) &= \text{als } x=y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0\\
\mathsf{ne}(x,y) &= \text{als } x\neq y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0\\
\mathsf{max}(x,y) &= \text{het maximum van } x \text{ en } y\\
\mathsf{min}(x,y) &= \text{het minimum van } x \text{ en } y\\
\mathsf{quo}(x,y) &= \text{als } y\neq 0 \text{ dan } \lfloor x/y\rfloor \text{ anders } 0\\
\mathsf{rem}(x,y) &= \text{als } y\neq 0 \text{ dan } x \bmod y \text{ anders } x\\
\mathsf{divides}(x,y) &= \text{als } y\neq 0 \text{ en } y\,|\,x \text{ dan } 1 \text{ anders } 0\\
\mathsf{even}(x) &= \text{als } x \text{ even is dan } 1 \text{ anders } 0\\
\mathsf{prime}(x) &= \text{als } x \text{ priem is dan } 1 \text{ anders } 0\\
\mathsf{pn}(x) &= \text{het } x\text{-de priemgetal}\\
&\ (\text{dus } \mathsf{pn}(0)=2,\ \mathsf{pn}(1)=3, \text{ etc.})
\end{aligned}
$$