Berekenbaarheid 2008, toets 3

vrijdag 16 mei, 11.45–12.30

Er zijn 3 opgaven die ieder 3 punten opleveren, 1 punt is gratis.

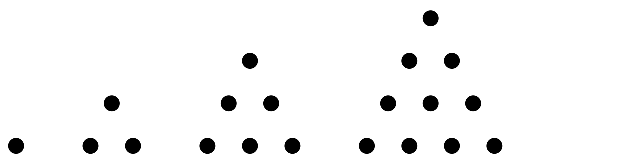
1. Geef functies h_1 en g_1 van $\mathbb{N}$ naar $\mathbb{N}$ met de eigenschappen:

   g_1 is totaal maar niet constant

   h_1 is niet totaal

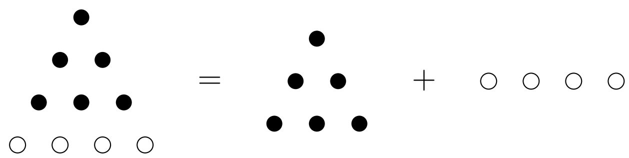
   $h_1 \circ g_1$ is totaal en constant

2. De *driehoeksgetallen* zijn:

   1 3 6 10

   Merk op dat je het x-de driehoeksgetal krijgt door bij het $(x-1)$-de driehoeksgetal het getal x op te tellen. Dus bijv. het 4-de driehoeksgetal is het 3-de driehoeksgetal plus 4:

   Laat $f_2(x)$ het driehoeksgetal van de driehoek met zijde x zijn, dus $f_2(0) = 0$, $f_2(1) = 1$, $f_2(2) = 3$, $f_2(3) = 6$, $f_2(4) = 10$, ...

   We kunnen f_2 definiëren met primitieve recursie, i.e., we kunnen f_2 schrijven als

   $$f_2 = \mathsf{primrec}(g_2, h_2)$$

   Beantwoord hierover nu de volgende vragen:

(a) Geef de waarde van $f_2(6)$.

(b) Geef de recursievergelijkingen voor f_2.

(c) Wat zijn de ariteiten van f_2, g_2 en h_2?

(d) Wat zijn de functies g_2 en h_2?

(e) Schrijf g_2 en h_2 als compositie van functies uit de lijst onderaan deze pagina.

(f) Is f_2 primitief recursief? Verklaar je antwoord.

3. Laat $f_3(x)$ een primitief recursieve functie zijn. We definiëren $g_3(y)$ als de kleinste x waarvoor $f_3(x)$, $f_3(x+1)$, $\ldots$, $f_3(x+y)$ allemaal dezelfde waarde hebben. (Als er geen x is waarvoor dit geldt, dan is $g_3(y)$ ongedefinieerd.)

   Laat zien dat $g_3(y)$ een μ-recursieve functie is.

   (Je mag gebruiken dat de functies uit onderstaande lijst primitief recursief zijn.)

$$
\begin{aligned}
\mathsf{id}(x) &= x \\
z(x) &= 0 \\
s(x) &= x+1 \\
p_i^{(k)}(x_1,\ldots,x_k) &= x_i \\
c_n^{(k)}(x_1,\ldots,x_k) &= n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{pred}(y) &= y \dot{-} 1 \\
\mathsf{add}(x,y) &= x+y \\
\mathsf{mult}(x,y) &= x \cdot y \\
\mathsf{sub}(x,y) &= x \dot{-} y \\
\mathsf{exp}(x,y) &= x^y \\
\mathsf{sg}(x) &= \text{als } x \neq 0 \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{cosg}(x) &= \text{als } x \neq 0 \text{ dan } 0 \text{ anders } 1 \\
\mathsf{lt}(x,y) &= \text{als } x < y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{gt}(x,y) &= \text{als } x > y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{le}(x,y) &= \text{als } x \leq y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{ge}(x,y) &= \text{als } x \geq y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{eq}(x,y) &= \text{als } x = y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{ne}(x,y) &= \text{als } x \neq y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{max}(x,y) &= \text{het maximum van } x \text{ en } y \\
\mathsf{min}(x,y) &= \text{het minimum van } x \text{ en } y \\
\mathsf{quo}(x,y) &= \text{als } y \neq 0 \text{ dan } \lfloor x/y \rfloor \text{ anders } 0 \\
\mathsf{rem}(x,y) &= \text{als } y \neq 0 \text{ dan } x \bmod y \text{ anders } x \\
\mathsf{divides}(x,y) &= \text{als } y \neq 0 \text{ en } y \mid x \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{even}(x) &= \text{als } x \text{ even is dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{prime}(x) &= \text{als } x \text{ priem is dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{pn}(x) &= \text{het } x\text{-de priemgetal} \\
& \text{(dus } \mathsf{pn}(0) = 2,\ \mathsf{pn}(1) = 3, \text{ etc.)}
\end{aligned}
$$
