Berekenbaarheid 2008, inhaaltoets

woensdag 21 mei, 11.45–12.30

Er zijn 3 opgaven die ieder 3 punten opleveren, 1 punt is gratis.

1. We definiëren een variant van de Turing machines die als hij naar links gaat niet één, maar twee stapjes doet. De transitiefunctie gaat bij dit soort machines naar $Q \times \Gamma \times \{LL, R\}$, waarbij LL *twee* stappen naar links betekent. Dit soort Turing machine accepteert door eindtoestand op de gebruikelijke wijze.

   Laat zien dat dit soort Turing machines precies de recursief opsombare talen accepteren.

2. Laat zien dat het onbeslisbaar is of – gegeven een Turing machine M, een string w, en een toestand q_i van M – de berekening van $M(w)$ ooit in q_i terecht zal komen.

3. Ieder positief natuurlijk getal kan op precies één manier geschreven worden als $2^x \cdot (2y + 1)$. Dit betekent dat er unieke functies $l : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ en $r : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bestaan waarvoor geldt dat

   $$\begin{aligned} l(n) &= x \\ r(n) &= y \end{aligned}$$

   voor die x en y waarvoor

   $$n + 1 = 2^x \cdot (2y + 1)$$

   Bijvoorbeeld geldt voor deze functies dat $l(71) = 3$ en $r(71) = 4$, want $71 + 1 = 72 = 8 \cdot 9 = 2^3 \cdot (2 \cdot 4 + 1)$.

   Laat zien dat l en r allebei primitief recursieve functies zijn.

   (Je mag gebruiken dat de functies op de achterzijde van dit blaadje primitief recursief zijn.)

Primitief recursieve functies

$$\begin{aligned}
\mathsf{id}(x) &= x\\
z(x) &= 0\\
s(x) &= x+1\\
p_i^{(k)}(x_1,\ldots,x_k) &= x_i\\
c_n^{(k)}(x_1,\ldots,x_k) &= n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathsf{pred}(y) &= y \mathbin{\dot{-}} 1\\
\mathsf{add}(x,y) &= x+y\\
\mathsf{mult}(x,y) &= x\cdot y\\
\mathsf{sub}(x,y) &= x \mathbin{\dot{-}} y\\
\mathsf{exp}(x,y) &= x^y\\
\mathsf{sg}(x) &= \text{als } x\neq 0 \text{ dan } 1 \text{ anders } 0\\
\mathsf{cosg}(x) &= \text{als } x\neq 0 \text{ dan } 0 \text{ anders } 1\\
\mathsf{lt}(x,y) &= \text{als } x<y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0\\
\mathsf{gt}(x,y) &= \text{als } x>y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0\\
\mathsf{le}(x,y) &= \text{als } x\leq y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0\\
\mathsf{ge}(x,y) &= \text{als } x\geq y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathsf{eq}(x,y) &= \text{als } x=y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0\\
\mathsf{ne}(x,y) &= \text{als } x\neq y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0\\
\mathsf{max}(x,y) &= \text{het maximum van } x \text{ en } y\\
\mathsf{min}(x,y) &= \text{het minimum van } x \text{ en } y\\
\mathsf{quo}(x,y) &= \text{als } y\neq 0 \text{ dan } \lfloor x/y\rfloor \text{ anders } 0\\
\mathsf{rem}(x,y) &= \text{als } y\neq 0 \text{ dan } x \bmod y \text{ anders } x\\
\mathsf{divides}(x,y) &= \text{als } y\neq 0 \text{ en } y\,|\,x \text{ dan } 1 \text{ anders } 0\\
\mathsf{even}(x) &= \text{als } x \text{ even is dan } 1 \text{ anders } 0\\
\mathsf{prime}(x) &= \text{als } x \text{ priem is dan } 1 \text{ anders } 0\\
\mathsf{pn}(x) &= \text{het } x\text{-de priemgetal}\\
&\ (\text{dus } \mathsf{pn}(0)=2,\ \mathsf{pn}(1)=3, \text{ etc.})
\end{aligned}$$