Berekenbaarheid 2008, uitwerkingen inhaaltoets

1. We moeten laten zien dat voor een taal L geldt dat er een machine M van het soort uit de opgave bestaat die L herkent, dan en slechts dan als er een standaard machine M' bestaat die L herkent.

   Als we een machine M van het soort uit de opgave hebben, dan kunnen we er een standaard machine M' van maken die dezelfde taal herkent, door voor iedere transitie naar links

   $$q_i \xrightarrow{a/b\,LL} q_j$$

   een nieuwe toestand q'_j toe te voegen, en de transitie te vervangen door

   $$q_i \xrightarrow{a/b\,L} q'_j \xrightarrow{x/x\,L} q_j$$

   waarbij er voor iedere $x \in \Gamma$ een transitie is van q'_j naar q_j.

   Andersom, als we een standaard machine M' hebben, dan kunnen we er een machine M van het soort uit de opgave van maken die dezelfde taal herkent, door voor iedere transitie naar links

   $$q_i \xrightarrow{a/b\,L} q_j$$

   een nieuwe toestand q'_j toe te voegen, en de transitie te vervangen door

   $$q_i \xrightarrow{a/b\,R} q'_j \xrightarrow{x/x\,LL} q_j$$

   waarbij er voor iedere $x \in \Gamma$ een transitie is van q'_j naar q_j. (Merk op dat de transitie naar rechts eerst moet, omdat je anders in M links van de tape zou kunnen aflopen waar dat in M' niet kan gebeuren.)

2. We reduceren het halting probleem naar het probleem uit de opgave. Hieruit volgt direct de onbeslisbaarheid.

   We laten dus zien hoe het halting probleem met behulp van het probleem uit de opgave op te lossen. Zij gegeven een input voor het halting probleem: een machine M en input w waarvoor we willen weten of de berekening $M(w)$ termineert.

We maken van M een machine M' door een extra toestand q_f aan M toe te voegen, en voor ieder toestand q_i uit M en symbool $a \in \Gamma$ waarvoor $\delta(q_i, a)$ in M niet is gedefinieerd een nieuwe transitie

$$q_i \xrightarrow{a/a\,R} q_f$$

Het is duidelijk dat $M'(w)$ in q_f terecht komt dan en slechts dan als $M(w)$ termineert.

Het halting probleem voor M en w wordt daarom opgelost door het probleem uit de opgave voor M', w en q_f. Maar het halting probleem is onbeslisbaar, en dus kan het probleem uit de opgave ook niet beslisbaar zijn.

3. Dat l en r primitief recursief zijn volgt onmiddelijk uit het feit dat ze te schrijven zijn als:

$$\begin{aligned} l(n) &= \mu x \leq n.\ \sum_{y=0}^{n} \mathsf{eq}\,(n+1, 2^x\,(2y+1)) \\ r(n) &= \mu y \leq n.\ \sum_{x=0}^{n} \mathsf{eq}\,(n+1, 2^x\,(2y+1)) \end{aligned}$$

(Hier wordt gebruikt dat $x < 2^x\,(2y+1)$ en $y < 2^x\,(2y+1)$.)