

# Berekenbaarheid najaar 2008, hertentamen

*woensdag 29 april, 15.30–17.30*

Er zijn 9 onderdelen die ieder 1 punt opleveren en 1 punt is gratis. Let op: bij het ‘definiëren’ van een Turing machine moet je deze geven door middel van een toestandsdiagram. Veel succes!

1. Definieer een standaard Turing machine met input alfabet  $\Sigma = \{a, b\}$  die uit zijn input alle  $b$ 's wist. Dus bij input *ababba* moet de output *aaa* zijn. Zorg ervoor dat bij terminatie de kop van de machine weer aan het begin van de tape staat.
2. Definieer een non-deterministische 2-tape Turing machine die de volgende taal herkent:

$$L = \{u_1u_2cu_2u_1 \mid u_1, u_2 \in \{a, b\}^*\}$$

De machine moet een element  $w$  van de taal in ten hoogste  $\frac{5}{2}|w| + 12$  stappen herkennen.

3. Definieer met de macro's op pagina 3 een Turing machine die de functie

$$k(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

uitrekent.

4. Bestaat er een recursieve taal waarvoor het onbeslisbaar is of een woord in die taal zit? Verklaar je antwoord.

Bestaat er een recursief opsombare taal waarvoor het onbeslisbaar is of een woord in die taal zit? Verklaar je antwoord.

5. Laat  $U$  een universele Turing machine zijn. Bestaat er dan altijd een input  $w$  waarvoor  $U$  termineert, dus waarvoor geldt dat  $U(w)\downarrow$ ? Verklaar je antwoord.
6. Laat zien dat het in zijn algemeenheid onbeslisbaar is of er bij een gegeven Turing machine een input bestaat waarvoor die machine termineert.

7. Schrijf de functie

$$k(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

als compositie van functies uit de lijst op pagina 4.

8. We definiëren met primitieve recursie

$$\begin{aligned} f(x, 0) &= 0 \\ f(x, y + 1) &= x^2 + y^2 + f(x, y)^2 \end{aligned}$$

Geef de waarde van  $f(2, 2)$ . Geef voorts functies  $g$  en  $h$  met  $f = \text{primrec}(g, h)$ .

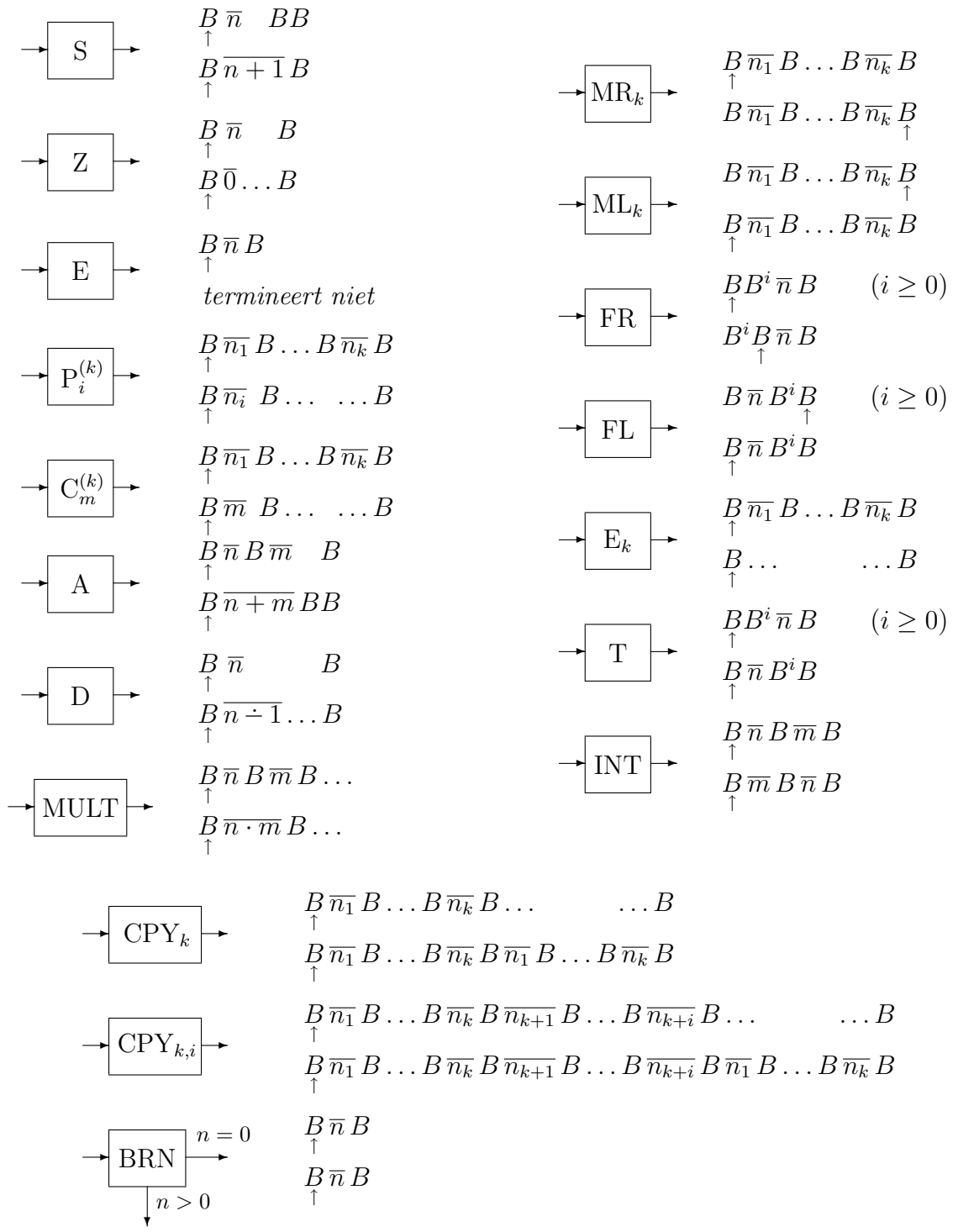
(Het is niet nodig deze functies als compositie van functies uit de lijst op pagina 4 te schrijven.)

9. We definiëren een functie

$$l(x, y) = \begin{cases} \text{het grootste priemgetal dat zowel } x \text{ als } y \text{ deelt} & \text{als er zo'n priemgetal bestaat} \\ 1 & \text{als dat niet zo is} \end{cases}$$

Geef de waarde van  $l(8, 10)$ .

Laat voorts zien dat  $l$  primitief recursief is. Je mag hierbij gebruiken dat de functies op pagina 4 primitief recursief zijn.



	$\text{id}(x)$	$= x$		
	$z(x)$	$= 0$		
	$s(x)$	$= x + 1$		
	$p_i^{(k)}(x_1, \dots, x_k)$	$= x_i$		
	$c_n^{(k)}(x_1, \dots, x_k)$	$= n$		
$\text{pred}(y)$	$= y - 1$		$\text{eq}(x, y)$	$=$ als $x = y$ dan 1 anders 0
$\text{add}(x, y)$	$= x + y$		$\text{ne}(x, y)$	$=$ als $x \neq y$ dan 1 anders 0
$\text{mult}(x, y)$	$= x \cdot y$		$\text{max}(x, y)$	$=$ het maximum van $x$ en $y$
$\text{sub}(x, y)$	$= x - y$		$\text{min}(x, y)$	$=$ het minimum van $x$ en $y$
$\text{exp}(x, y)$	$= x^y$		$\text{quo}(x, y)$	$=$ als $y \neq 0$ dan $\lfloor x/y \rfloor$ anders 0
$\text{sg}(x)$	$=$ als $x \neq 0$ dan 1 anders 0		$\text{rem}(x, y)$	$=$ als $y \neq 0$ dan $x \bmod y$ anders $x$
$\text{cosg}(x)$	$=$ als $x \neq 0$ dan 0 anders 1		$\text{divides}(x, y)$	$=$ als $y \neq 0$ en $y \mid x$ dan 1 anders 0
$\text{lt}(x, y)$	$=$ als $x < y$ dan 1 anders 0		$\text{even}(x)$	$=$ als $x$ even is dan 1 anders 0
$\text{gt}(x, y)$	$=$ als $x > y$ dan 1 anders 0		$\text{prime}(x)$	$=$ als $x$ priem is dan 1 anders 0
$\text{le}(x, y)$	$=$ als $x \leq y$ dan 1 anders 0		$\text{pn}(x)$	$=$ het $x$ -de priemgetal
$\text{ge}(x, y)$	$=$ als $x \geq y$ dan 1 anders 0			(dus $\text{pn}(0) = 2$ , $\text{pn}(1) = 3$ , etc.)