Berekenbaarheid 2009, tentamen

vrijdag 29 januari, 13.30–15.30

Er zijn 9 onderdelen die ieder 1 punt opleveren en 1 punt is gratis. Let op: bij het 'definiëren' van een Turing machine moet je deze geven door middel van een toestandsdiagram. Veel succes!

1. Definieer een standaard Turing machine die de volgende taal (de taal van de *palindromen*) accepteert door eindtoestand:

$$L_1 := \{w \in \{a, b\}^* \mid w = w^R\}$$

2. Definieer een non-deterministische 2-tape Turing machine die de taal L_1 uit de vorige opgave accepteert door eindtoestand, en waarbij een correcte input $w \in L_1$ altijd wordt geaccepteerd in ten hoogste $\mathsf{length}(w) + 2$ stappen.

3. Definieer een 2-tape Turing machine die de taal

$$L_3 := \{a^n b a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

opsomt op zijn eerste tape.

4. Laat zien dat iedere recursief opsombare taal kan worden herkend door een Turing machine waarbij de enige transitie vanuit q_0 de overgang $B/B\,R$ is, en waarbij er geen enkele transitie naar q_0 toe gaat.

5. Beschrijf het input-/outputgedrag van de universele Turing machine U. Welke taal accepteert U door stoppen? Is deze taal recursief? En is hij recursief opsombaar? Verklaar de antwoorden.

   Beschrijf ook wat U doet bij input die niet de vorm heeft die deze machine verwacht, zoals bijv. bij berekening van $U(\lambda)$.

6. Laat zien dat het onbeslisbaar is voor een gegeven Turing machine M of $M(R(M))$ termineert.

7. De functie f_7 is gedefinieerd door

$$f_7(a, b, c, x) = ax^2 + bx + c$$

Schrijf f_7 als compositie van de functies uit de lijst op pagina 3.

8. De functie odd is gedefinieerd door

$$\mathsf{odd}(x) = \begin{cases} 1 & \text{als } x \text{ oneven is} \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$

   Laat zien dat odd primitief recursief is *zonder* de begrensde operatoren te gebruiken, en *zonder* te gebruiken dat de functies op pagina 3 primitief recursief zijn. (Je mag natuurlijk wel gebruiken dat de basisfuncties primitief recursief zijn.)

9. Gegeven een primitief recursieve functie g_9. De functie f_9 is gedefinieerd door

$$f_9(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{als } g_9(z) \leq g_9(z+1) \text{ voor alle } z \text{ met } x \leq z < y \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$

   Laat zien dat f_9 ook een primitief recursieve functie is. (Je mag gebruiken dat de functies op pagina 3 primitief recursief zijn.)

$$
\begin{aligned}
\mathsf{id}(x) &= x \\
z(x) &= 0 \\
s(x) &= x+1 \\
p_i^{(k)}(x_1,\ldots,x_k) &= x_i \\
c_n^{(k)}(x_1,\ldots,x_k) &= n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{pred}(y) &= y \dot{-} 1 \\
\mathsf{add}(x,y) &= x+y \\
\mathsf{mult}(x,y) &= x \cdot y \\
\mathsf{sub}(x,y) &= x \dot{-} y \\
\mathsf{exp}(x,y) &= x^y \\
\mathsf{sg}(x) &= \text{als } x \neq 0 \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{cosg}(x) &= \text{als } x \neq 0 \text{ dan } 0 \text{ anders } 1 \\
\mathsf{lt}(x,y) &= \text{als } x < y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{gt}(x,y) &= \text{als } x > y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{le}(x,y) &= \text{als } x \leq y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{ge}(x,y) &= \text{als } x \geq y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{eq}(x,y) &= \text{als } x = y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{ne}(x,y) &= \text{als } x \neq y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{max}(x,y) &= \text{het maximum van } x \text{ en } y \\
\mathsf{min}(x,y) &= \text{het minimum van } x \text{ en } y \\
\mathsf{quo}(x,y) &= \text{als } y \neq 0 \text{ dan } \lfloor x/y \rfloor \text{ anders } 0 \\
\mathsf{rem}(x,y) &= \text{als } y \neq 0 \text{ dan } x \bmod y \text{ anders } x \\
\mathsf{divides}(x,y) &= \text{als } y \neq 0 \text{ en } y \mid x \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{even}(x) &= \text{als } x \text{ even is dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{prime}(x) &= \text{als } x \text{ priem is dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{pn}(x) &= \text{het } x\text{-de priemgetal} \\
& \text{(dus } \mathsf{pn}(0) = 2,\ \mathsf{pn}(1) = 3, \text{ etc.)}
\end{aligned}
$$