Berekenbaarheid 2009, toets 3

vrijdag 15 januari, 14.45–15.30

Er zijn 4 opgaven, die alle 2 punten waard zijn behalve de derde opgave die 3 punten waard is. De eerste punt is gratis. Veel succes!

1. Geef functies f_1 en f_2 zodat $f_1 \circ f_2 = \mathsf{id}$ en f_1 niet totaal is. Kan f_2 óók niet-totaal zijn? Verklaar je antwoorden.

2. De *binomiaalcoëfficienten* zijn gedefinieerd als

$$\mathsf{binom}(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x!}{y!\,(x-y)!} & \text{als } y \leq x \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$

   waarin $x!$ de faculteit van x is. Schrijf binom als compositie van functies uit de lijst op pagina 2.

3. Laat zien hoe exp is gedefinieerd met primitieve recursie. Schrijf

$$\mathsf{exp} = \mathsf{primrec}(g, h)$$

   en geef g en h als compositie van de basisfuncties s, $c_0^{(n)}$ en $p_k^{(n)}$ en van mult.

4. Laat k_1 en k_2 primitief recursieve functies zijn. De functie k is gedefinieerd als

$$k(x) = \begin{cases} 1 & \text{als er } x \leq y \leq z \text{ zijn met } k_1(y) = k_2(z) \\ \uparrow & \text{anders} \end{cases}$$

   Laat zien dat k een μ-recursieve functie is. Je mag gebruiken dat de functies op pagina 2 alle primitief recursief zijn.

$$\begin{aligned}
\mathsf{id}(x) &= x \\
z(x) &= 0 \\
s(x) &= x+1 \\
p_i^{(k)}(x_1,\ldots,x_k) &= x_i \\
c_n^{(k)}(x_1,\ldots,x_k) &= n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathsf{pred}(y) &= y \mathbin{\dot{-}} 1 \\
\mathsf{add}(x,y) &= x+y \\
\mathsf{mult}(x,y) &= x \cdot y \\
\mathsf{sub}(x,y) &= x \mathbin{\dot{-}} y \\
\mathsf{exp}(x,y) &= x^y \\
\mathsf{fact}(x) &= x! \\
\mathsf{sg}(x) &= \text{als } x \neq 0 \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{cosg}(x) &= \text{als } x \neq 0 \text{ dan } 0 \text{ anders } 1 \\
\mathsf{lt}(x,y) &= \text{als } x < y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{gt}(x,y) &= \text{als } x > y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{le}(x,y) &= \text{als } x \leq y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{ge}(x,y) &= \text{als } x \geq y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathsf{eq}(x,y) &= \text{als } x = y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{ne}(x,y) &= \text{als } x \neq y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{max}(x,y) &= \text{het maximum van } x \text{ en } y \\
\mathsf{min}(x,y) &= \text{het minimum van } x \text{ en } y \\
\mathsf{quo}(x,y) &= \text{als } y \neq 0 \text{ dan } \lfloor x/y \rfloor \text{ anders } 0 \\
\mathsf{rem}(x,y) &= \text{als } y \neq 0 \text{ dan } x \bmod y \text{ anders } x \\
\mathsf{divides}(x,y) &= \text{als } y \neq 0 \text{ en } y \mid x \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{even}(x) &= \text{als } x \text{ even is dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{prime}(x) &= \text{als } x \text{ priem is dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{pn}(x) &= \text{het } x\text{-de priemgetal} \\
&\ (\text{dus } \mathsf{pn}(0) = 2,\ \mathsf{pn}(1) = 3, \text{ etc.})
\end{aligned}$$