Berekenbaarheid 2009, inhaaltoets

vrijdag 22 januari, 14.45–15.30

Er zijn 3 onderdelen die ieder 3 punten opleveren, 1 punt is gratis.

1. Een Turing machine *met twee koppen op dezelfde tape* heeft twee koppen, die allebei op dezelfde tape werken. Bij een transitie worden voor allebei de koppen een lees- en een schrijfsymbool, en een richting aangegeven. Bij het uitvoeren van zo'n transitie gebeurt het lezen door beide koppen tegelijk en vóór er door de andere kop is geschreven. Als beide koppen op hetzelfde vakje een verschillend symbool proberen te schrijven 'wint' de tweede kop. Bijvoorbeeld als vanuit de begintoestand (waarbij beide koppen op vakje nul staan) een transitie

   $$\rightarrow q_0 \xrightarrow{[B/aR,B/bR]} q_1$$

   wordt gedaan, dan komt op vakje nul een b te staan, en gaan beide koppen vervolgens naar vakje één.

   Laat zien dat de taal die door dit type Turing machine wordt herkend altijd recursief opsombaar is. (Je mag je antwoord presenteren als een aanpassing van het bewijs uit het boek dat een Turing machine met meerdere *tapes* altijd een recursief opsombare taal herkent.)

2. Laat zien dat het onbeslisbaar is of een gegeven Turing machine M bij een berekening op gegeven input w ooit in een gegeven toestand q_i terecht zal komen. (Als input van dit probleem kan bijvoorbeeld $R(M)1^i0w$ worden gebruikt, hoewel de precieze codering er natuurlijk niet toe doet.)

3. De functie f is gedefinieerd als

   $$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{als } x \text{ het verschil is van twee priemgetallen} \\ \uparrow & \text{anders} \end{cases}$$

   (Bijvoorbeeld $f(7)\uparrow$ want 7 is niet het verschil van twee priemgetallen, maar $f(8) = 1$, want $8 = 11 - 3$.) Laat zien dat f een μ-recursieve functie is. Je mag gebruiken dat de functies op pagina 2 alle primitief recursief zijn.

$$
\begin{aligned}
\mathsf{id}(x) &= x \\
z(x) &= 0 \\
s(x) &= x+1 \\
p_i^{(k)}(x_1,\ldots,x_k) &= x_i \\
c_n^{(k)}(x_1,\ldots,x_k) &= n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{pred}(y) &= y \mathbin{\dot-} 1 \\
\mathsf{add}(x,y) &= x+y \\
\mathsf{mult}(x,y) &= x \cdot y \\
\mathsf{sub}(x,y) &= x \mathbin{\dot-} y \\
\mathsf{exp}(x,y) &= x^y \\
\mathsf{sg}(x) &= \text{als } x \neq 0 \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{cosg}(x) &= \text{als } x \neq 0 \text{ dan } 0 \text{ anders } 1 \\
\mathsf{lt}(x,y) &= \text{als } x < y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{gt}(x,y) &= \text{als } x > y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{le}(x,y) &= \text{als } x \leq y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{ge}(x,y) &= \text{als } x \geq y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{eq}(x,y) &= \text{als } x = y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{ne}(x,y) &= \text{als } x \neq y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{max}(x,y) &= \text{het maximum van } x \text{ en } y \\
\mathsf{min}(x,y) &= \text{het minimum van } x \text{ en } y \\
\mathsf{quo}(x,y) &= \text{als } y \neq 0 \text{ dan } \lfloor x/y \rfloor \text{ anders } 0 \\
\mathsf{rem}(x,y) &= \text{als } y \neq 0 \text{ dan } x \bmod y \text{ anders } x \\
\mathsf{divides}(x,y) &= \text{als } y \neq 0 \text{ en } y \,|\, x \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{even}(x) &= \text{als } x \text{ even is dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{prime}(x) &= \text{als } x \text{ priem is dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{pn}(x) &= \text{het } x\text{-de priemgetal} \\
&\ (\text{dus } \mathsf{pn}(0) = 2,\ \mathsf{pn}(1) = 3, \text{ etc.})
\end{aligned}
$$