Berekenbaarheid 2009, uitwerkingen toets 3

1. Neem

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \begin{cases} x-1 & \text{als } x>0 \\ \uparrow & \text{anders} \end{cases} \\ f_2(x) &= x+1 \end{aligned}$$

   Nee, f_2 kan niet niet-totaal zijn, want als $f_2(x)$ niet gedefinieerd is, dan is $(f_1 \circ f_2)(x)$ per definitie ook altijd niet gedefinieerd. Maar die moet wel gedefinieerd zijn, want gelijk aan $\mathsf{id}(x) = x$.

2. We hebben

$$\mathsf{binom}(x,y) = \mathsf{mult}(\mathsf{quo}(\mathsf{fact}(x), \mathsf{mult}(\mathsf{fact}(y), \mathsf{fact}(\mathsf{sub}(x,y)))), \mathsf{ge}(x,y))$$

   Dus hebben we als compositie

$$\mathsf{binom} = \mathsf{mult} \circ (\mathsf{quo} \circ (\mathsf{fact} \circ p_1^{(2)}, \mathsf{mult} \circ (\mathsf{fact} \circ p_2^{(2)}, \mathsf{fact} \circ \mathsf{sub})), \mathsf{ge})$$

3. De recursievergelijkingen zijn

$$\begin{aligned} \mathsf{exp}(x,0) &= 1 = g(x) \\ \mathsf{exp}(x,y+1) &= \mathsf{mult}(x, \mathsf{exp}(x,y)) = h(x,y,\mathsf{exp}(x,y)) \end{aligned}$$

   Dus kunnen we kiezen

$$\begin{aligned} g(x) &= 1 \\ h(x,y,w) &= = \mathsf{mult}(x,w) \end{aligned}$$

   Als compositie is dit

$$\begin{aligned} g &= s \circ c_0^{(1)} \\ h &= \mathsf{mult} \circ (p_1^{(3)}, p_3^{(3)}) \end{aligned}$$

   En dat betekent dus dat we exp kunnen schrijven als

$$\mathsf{exp} = \mathsf{primrec}\big(s \circ c_0^{(1)}, \mathsf{mult} \circ (p_1^{(3)}, p_3^{(3)})\big)$$

4. We kunnen $k(x)$ schrijven als

$$k(x) = c_1^{(1)}\big(\mu z.\ \sum_{y=x}^{z} \mathsf{eq}(k_1(y), k_2(z))\big)$$

   Hieruit volgt direct dat k een μ-recursieve functie is.