Berekenbaarheid 2010, toets 2

woensdag 15 december, 11.45–12.30

Er zijn 4 opgaven. Opgaven 1 en 4 leveren 2 punten op, opgaven 2 en 3 leveren $2\frac{1}{2}$ punt op, en 1 punt is gratis. Veel succes!

1. Geef de code $R(M_1)$ van een Turing machine M_1 die de taal

$$L(M_1) = \{0,1\}^* \backslash \{\lambda\}$$

   herkent. Dus M_1 accepteert ieder woord behalve λ. Voor de beschrijving van de codering uit Sudkamp zie de achterzijde van dit blaadje.

2. Bestaat er een Turing machine M_2 die een taal herkent die niet recursief is? Verklaar je antwoord. Als zo'n Turing machine bestaat, geef dan een expliciet voorbeeld. Als zo'n Turing machine niet bestaat, leg dan uit waarom niet.

3. Is het probleem beslisbaar dat vraagt of een gegeven Turing machine M de eigenschap heeft dat hij precies dan stopt als zijn input een 1 bevat? (Het gaat er dus niet om of er zo'n M bestaat want dat is natuurlijk zo, maar of het *herkennen* van zulke M door een Turing machine gedaan kan worden.) Zo ja, geef een tekstuele beschrijving van een beslissingsprocedure. Zo nee, bewijs de onbeslisbaarheid.

   Beschrijf expliciet hoe de input eruit ziet van een Turing machine P_3 die dit probleem zou moeten beslissen.

4. Laat zien dat het probleem onbeslisbaar is dat vraagt of een Turing machine met input λ (dus met aan het begin een lege tape) na eindige tijd stopt met output λ (dus met na de berekening weer een lege tape; de lees/schrijf-kop hoeft hierbij niet op vakje 0 te staan, maar mag niet links van de tape zijn afgelopen).

   In andere woorden, laat zien dat er geen Turing machine P_4 bestaat, die gegeven input $R(M)$ deze input accepteert met $P_4(R(M)) = 1$ als geldt dat $M(\lambda) = \lambda$, en deze input verwerpt met $P_4(R(M)) = 0$ als geldt dat $M(\lambda) \neq \lambda$ of $M(\lambda)\uparrow$.

(Relevant stukje van p. 355 uit het boek van Sudkamp:)

A Turing machine M is defined by its transition function. A transition of a standard Turing machine has the form $\delta(q_i, x) = [q_j, y, d]$, where $q_i, q_j \in Q$; $x, y \in \Gamma$; and $d \in \{L, R\}$. We encode the elements of M using strings of 1's:

Symbol	Encoding
0	1
1	11
B	111
q_0	1
q_1	11
$\vdots$	$\vdots$
q_n	1^{n+1}
L	1
R	11

Let $en(x)$ denote the encoding of a symbol x. A transition $\delta(q_i, x) = [q_j, y, d]$ is encoded by the string

$$en(q_i)0en(x)0en(q_j)0en(y)0en(d).$$

The 0's separate the components of the transition. A representation of the machine is constructed from the encoded transitions. Two consecutive 0's are used to separate transitions. The beginnning and end of the representation are designated by three 0's.