Berekenbaarheid 2010, toets 3

vrijdag 12 januari, 11.45–12.30

Er zijn 4 opgaven, die alle 2 punten waard zijn behalve de derde opgave die 3 punten waard is. Het eerste punt is gratis. Veel succes!

1. Geef getaltheoretische functies f_1 en f_2 zodat $f_1 \circ f_2 = \mathsf{id}$, $f_2 \circ f_1 = \mathsf{id}$, maar $f_1 \neq \mathsf{id}$ en $f_2 \neq \mathsf{id}$. Verklaar je antwoord.

2. De *driehoeksgetallen* zijn gedefinieerd als

   $$\mathsf{triangle}(x) = \frac{x(x+1)}{2}$$

   Schrijf triangle als compositie van functies uit de lijst op pagina 2. Is triangle primitief recursief? Verklaar je antwoord.

3. De relatie

   $$\mathsf{triangle}(x+1) = \mathsf{triangle}(x) + x + 1$$

   laat zien dat je de driehoeksgetallen uit de vorige opgaven met primitieve recursie kunt definiëren zonder dat je mult hoeft te gebruiken.

   Geef de recursievergelijkingen voor zo'n recursieve definitie van triangle en schrijf vervolgens triangle in de vorm

   $$\mathsf{triangle} = \mathsf{primrec}(g, h)$$

   Geef g en h zowel door hun waarde toegepast op hun argumenten te geven, als door ze als compositie van de basisfuncties s, $c_0^{(n)}$ en $p_k^{(n)}$ en van add te schrijven.

4. Een positief getal heet *perfect* als het de som van al zijn delers behalve zichzelf is. Zo is bijvoorbeeld 28 perfect, want 28 heeft delers $\{1, 2, 4, 7, 14, 28\}$, en $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$. Het is gebruikelijk om 0 geen perfect getal te noemen.

   De functie k is gedefinieerd als

   $$k(x) = \begin{cases} \text{het kleinste perfecte getal } y \text{ met } y \geq x, \text{ mits dat bestaat} \\ \uparrow \ \text{ als er geen perfect getal } y \text{ is met } y \geq x \end{cases}$$

   Laat zien dat k een μ-recursieve functie is. Je mag gebruiken dat de functies op pagina 2 alle primitief recursief zijn.

$$
\begin{aligned}
\mathsf{id}(x) &= x \\
z(x) &= 0 \\
s(x) &= x+1 \\
p_i^{(k)}(x_1,\ldots,x_k) &= x_i \\
c_n^{(k)}(x_1,\ldots,x_k) &= n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{pred}(y) &= y \dot{-} 1 \\
\mathsf{add}(x,y) &= x+y \\
\mathsf{mult}(x,y) &= x \cdot y \\
\mathsf{sub}(x,y) &= x \dot{-} y \\
\mathsf{exp}(x,y) &= x^y \\
\mathsf{fact}(x) &= x! \\
\mathsf{sg}(x) &= \text{als } x \neq 0 \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{cosg}(x) &= \text{als } x \neq 0 \text{ dan } 0 \text{ anders } 1 \\
\mathsf{lt}(x,y) &= \text{als } x < y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{gt}(x,y) &= \text{als } x > y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{le}(x,y) &= \text{als } x \leq y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{ge}(x,y) &= \text{als } x \geq y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{eq}(x,y) &= \text{als } x = y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{ne}(x,y) &= \text{als } x \neq y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{max}(x,y) &= \text{het maximum van } x \text{ en } y \\
\mathsf{min}(x,y) &= \text{het minimum van } x \text{ en } y \\
\mathsf{quo}(x,y) &= \text{als } y \neq 0 \text{ dan } \lfloor x/y \rfloor \text{ anders } 0 \\
\mathsf{rem}(x,y) &= \text{als } y \neq 0 \text{ dan } x \bmod y \text{ anders } x \\
\mathsf{divides}(x,y) &= \text{als } y \neq 0 \text{ en } y \,|\, x \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{even}(x) &= \text{als } x \text{ even is dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{prime}(x) &= \text{als } x \text{ priem is dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{pn}(x) &= \text{het } x\text{-de priemgetal} \\
& \text{(dus } \mathsf{pn}(0) = 2,\ \mathsf{pn}(1) = 3, \text{ etc.)}
\end{aligned}
$$