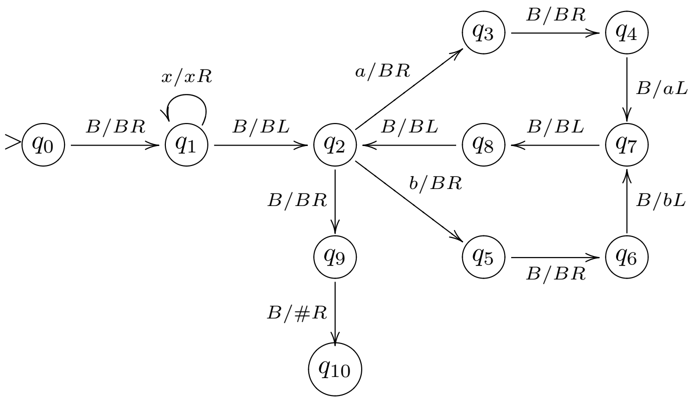
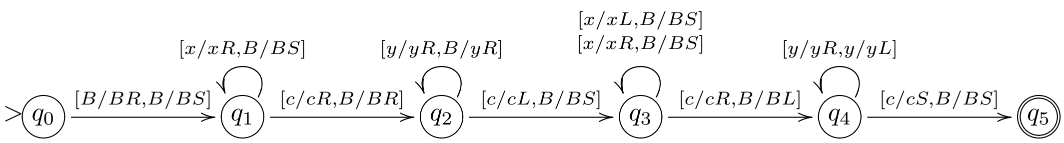
Berekenbaarheid 2010, uitwerkingen toets 1

1. $x \in \{a, b\}$



2. $x \in \{B, a, b, c\}, y \in \{a, b\}$



3. L is recursief opsombaar $\iff$ L wordt herkend door een machine die nooit een niet-blank symbool op vakje 0 van de tape schrijft

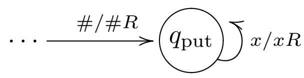
   Bewijs. $\Longrightarrow$:

   'L is recursief opsombaar' betekent per definitie dat er een Turing machine bestaat die L herkent. Neem dus zo'n Turing machine $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0)$. We definiëren nu een Turing machine met de gevraagde eigenschap M' in termen van M, waarbij M' zo geconstrueerd is dat hij dezelfde taal L als M herkent, maar ook zo dat hij (behalve helemaal aan het begin) nooit op vakje 0 komt.

   M' bestaat uit drie delen. Het eerste deel van M' schuift de input twee plaatsen naar rechts, schrijft een $\# \notin \Gamma$ op vakje 1 en eindigt in de toestand q_0 van M op vakje 2. Voor het alfabet $\Sigma = \{a, b\}$ is dit deel van de machine gegeven in het antwoord op opgave 1 van deze toets. Voor andere alfabetten ziet de machine er net zo uit.

   Het tweede deel van M' bestaat uit de toestanden van M en de transitities van M. Vanuit ieder van deze toestanden wordt er ook nog een extra transitie $\#/\#R$ toegevoegd naar de toestand q_{put} van het derde deel van M'.

Het derde deel van M' is dus een extra 'put' toestand $q_{\text{put}} \notin Q$:



Deze toestand heeft een lus voor iedere $x \in \Gamma$.

De machine $M' = (Q', \Sigma, \Gamma', \delta', q'_0)$ heeft dus tape alfabet $\Gamma' = \Gamma \cup \{\#\}$ en heeft $|Q'| = |Q| + 2|\Sigma| + 7$ toestanden: $6 + 2|\Sigma|$ extra toestanden voor het eerste deel (de 'q_{10}' van de machine uit opgave 1 valt samen met de 'q_0' van M) en 1 extra toestand voor de put van het derde deel.

Dat de machine M' dezelfde taal als M herkent is eenvoudig in te zien, aangezien hij de berekening van M doet, maar dan twee vakjes naar rechts verschoven. Mocht M bij een input abnormaal termineren (= links van de tape aflopen, wat betekent dat de input niet wordt geaccepteerd), dan komt M' op de # op vakje 1 terecht, gaat naar de put, en termineert niet (en de input wordt dan dus ook door M' niet geaccepteerd).

$\Longleftarrow$:

Dit is de triviale kant van de equivalentie. Als L door een Turing machine M met de gegeven eigenschappen wordt herkend, dan wordt hij dus door een Turing machine herkend, en is dus per definitie recursief opsombaar.