Berekenbaarheid 2010, uitwerkingen toets 3

1. Definieer f door
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{als} \quad x = 0 \\ 0 & \text{als} \quad x = 1 \\ x & \text{als} \quad x \geq 2 \end{cases}$$
en neem
$$\begin{aligned} f_1 &= f \\ f_2 &= f \end{aligned}$$

2. $$\mathsf{triangle} = \mathsf{quo} \circ (\mathsf{mult} \circ (p_1^{(1)}, s), c_2^{(1)})$$
Deze functie is primitief recursief, want is de compositie van functies die allemaal primitief recursief zijn, en primitief recursief zijn is gesloten onder compositie.

3. De recursievergelijkingen zijn
$$\begin{aligned} &\mathsf{triangle}(0) &&= g() = 0 \\ &\mathsf{triangle}(y+1) &&= h(y, \mathsf{triangle}(y)) = \mathsf{triangle}(y) + y + 1 \end{aligned}$$
Dus de functies g en h zijn:
$$\begin{aligned} g() &= 0 \\ h(y, w) &= w + y + 1 \end{aligned}$$
Als compositie kunnen we g en h schrijven als:
$$\begin{aligned} g &= c_0^{(0)} \\ h &= \mathsf{add} \circ (p_2^{(2)}, s \circ p_1^{(2)}) \end{aligned}$$
We hebben tenslotte:
$$\mathsf{triangle} = \mathsf{primrec}(c_0^{(0)}, \mathsf{add} \circ (p_2^{(2)}, s \circ p_1^{(2)}))$$

4. $$k(x) = \mu y. \Big(\mathsf{ge}(y, x) \cdot \mathsf{sg}(y) \cdot \mathsf{eq}(y, \sum_{d=0}^{\mathsf{pred}(y)} (\mathsf{divides}(y, d) \cdot d) \Big)$$