Berekenbaarheid 2011, tentamen

dinsdag 24 januari, 15.30–17.30

Denk eraan je naam en studentnummer op je uitwerkingen te vermelden. Iedere opgave is 1 punt waard, behalve de eerste twee opgaven die $1\frac{1}{2}$ punt waard zijn, en 1 punt is gratis. Misschien is het een goed idee de bewerkelijker opgaven tot het eind te bewaren. Veel succes!

1. Definieer door het tekenen van een toestandsdiagram een standaard Turing machine met input alfabet $\Sigma = \{a, b\}$ die zijn input één plaats naar rechts 'roteert' (d.w.z., die het laatste symbool eraf haalt en dat ervoor plakt; en waarbij het lege woord onveranderd wordt gelaten) en daarna termineert met de kop weer aan het begin van de tape. Bij input $aaabbb$ moet dus met begintoestand van de tape

   $$\underset{\uparrow}{B}aaabbbB\ldots$$

   de machine termineren in de toestand

   $$\underset{\uparrow}{B}baaabbB\ldots$$

2. Definieer door het tekenen van een toestandsdiagram een non-deterministische 2-tape Turing machine die de taal

   $$L_2 := \{w \in \{a, b, c\}^* \mid \text{er is een } n \in \mathbb{N} \text{ zodat } w \text{ zowel } ca^nc \text{ als } cb^nc \text{ bevat}\}$$

   herkent door eindtoestand. Een correcte input w moet worden herkend in minder dan $3|w| + 3$ stappen.

3. Definieer met behulp van de macro's op pagina 3 een Turing machine die de numerieke functie

   $$\mathsf{max}(n, m) = \begin{cases} n & \text{als } n \geq m \\ m & \text{als } m \geq n \end{cases}$$

   berekent.

4. Het probleem P_4 vraagt of een gegeven Turing machine M met input de blanco tape stopt na ≤ 100 stappen.

   Laat zien dat dit probleem beslisbaar is.

5. Het probleem P_5 vraagt of een gegeven Turing machine M met input de blanco tape stopt na ≥ 100 stappen.

   Laat zien dat dit probleem onbeslisbaar is. Valt dit probleem onder de stelling van Rice? Verklaar je antwoord.

6. Beschrijf de drie functies

$$f_1 := s \circ p_1^{(3)} \circ (\mathsf{id}, z, e)$$
$$f_2 := s \circ p_2^{(3)} \circ (\mathsf{id}, z, e)$$
$$f_3 := s \circ p_3^{(3)} \circ (\mathsf{id}, z, e)$$

Geef van al deze drie functies de ariteit en het domein. Welke van deze drie functies zijn primitief recursief? En welke zijn μ-recursief? Verklaar je antwoorden.

7. We definiëren met primitieve recursie een functie f_7 door

$$\begin{aligned} f_7(x, 0) &= x \\ f_7(x, y+1) &= f_7(x, y) + \mathsf{ge}(y, x) \end{aligned}$$

Bereken de waarde van $f_7(3, 5)$.

Geef vervolgens functies g en h zodat

$$f_7 = \mathsf{primrec}(g, h)$$

en schrijf g en h als compositie van de functies op pagina 4.

Is de functie f_7 primitief recursief? Verklaar je antwoord. Je mag gebruiken dat de functies op pagina 4 primitief recursief zijn.

8. Gegeven een functie k met ariteit 2 die primitief recursief is. Laat zien dat de functie

$$f_8(x) = \begin{cases} 1 & \text{als er } y_1 \text{ en } y_2 \text{ bestaan met } x \leq y_1 \leq y_2 \text{ en } k(y_1, y_2) \neq 0 \\ \uparrow & \text{anders} \end{cases}$$

Laat zien dat f_8 μ-recursief is. Je mag gebruiken dat de functies op pagina 4 primitief recursief zijn.

$\rightarrow \boxed{\mathrm{S}} \rightarrow$

$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\quad BB$

$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n+1}\,B$

$\rightarrow \boxed{\mathrm{Z}} \rightarrow$

$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\quad B$

$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{0}\ldots B$

$\rightarrow \boxed{\mathrm{E}} \rightarrow$

$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B$

termineert niet

$\rightarrow \boxed{\mathrm{P}_i^{(k)}} \rightarrow$

$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B$

$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_i}\;\,B\ldots\quad\ldots B$

$\rightarrow \boxed{\mathrm{C}_m^{(k)}} \rightarrow$

$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B$

$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{m}\;\,B\ldots\quad\ldots B$

$\rightarrow \boxed{\mathrm{A}} \rightarrow$

$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B\,\overline{m}\quad B$

$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n+m}\,BB$

$\rightarrow \boxed{\mathrm{D}} \rightarrow$

$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\qquad B$

$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n \dot{-} 1}\ldots B$

$\rightarrow \boxed{\mathrm{SUB}} \rightarrow$

$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B\,\overline{m}\quad B$

$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n \dot{-} m}\ldots B$

$\rightarrow \boxed{\mathrm{MULT}} \rightarrow$

$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B\,\overline{m}\,B\ldots$

$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n\cdot m}\,B\ldots$

$\rightarrow \boxed{\mathrm{MR}_k} \rightarrow$

$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B$

$B\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,\underset{\uparrow}{B}$

$\rightarrow \boxed{\mathrm{ML}_k} \rightarrow$

$B\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,\underset{\uparrow}{B}$

$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B$

$\rightarrow \boxed{\mathrm{FR}} \rightarrow$

$\underset{\uparrow}{B}B^i\,\overline{n}\,B \qquad (i \geq 0)$

$B^i\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B$

$\rightarrow \boxed{\mathrm{FL}} \rightarrow$

$B\,\overline{n}\,B^i\underset{\uparrow}{B} \qquad (i \geq 0)$

$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B^i B$

$\rightarrow \boxed{\mathrm{E}_k} \rightarrow$

$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B$

$\underset{\uparrow}{B}\ldots\qquad\ldots B$

$\rightarrow \boxed{\mathrm{T}} \rightarrow$

$\underset{\uparrow}{B}B^i\,\overline{n}\,B \qquad (i \geq 0)$

$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B^i B$

$\rightarrow \boxed{\mathrm{INT}} \rightarrow$

$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B\,\overline{m}\,B$

$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{m}\,B\,\overline{n}\,B$

$\rightarrow \boxed{\mathrm{CPY}_k} \rightarrow$

$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B\ldots\qquad\ldots B$

$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B$

$\rightarrow \boxed{\mathrm{CPY}_{k,i}} \rightarrow$

$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B\,\overline{n_{k+1}}\,B\ldots B\,\overline{n_{k+i}}\,B\ldots\qquad\ldots B$

$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B\,\overline{n_{k+1}}\,B\ldots B\,\overline{n_{k+i}}\,B\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B$

$\rightarrow \boxed{\mathrm{BRN}} \xrightarrow{n=0}$, $\quad \boxed{\mathrm{BRN}} \xrightarrow{n>0} \downarrow$

$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B$

$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{id}(x) &= x \\
z(x) &= 0 \\
s(x) &= x+1 \\
p_i^{(k)}(x_1,\ldots,x_k) &= x_i \\
c_n^{(k)}(x_1,\ldots,x_k) &= n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{pred}(y) &= y \dot{-} 1 \\
\mathsf{add}(x,y) &= x+y \\
\mathsf{mult}(x,y) &= x\cdot y \\
\mathsf{sub}(x,y) &= x \dot{-} y \\
\mathsf{exp}(x,y) &= x^y \\
\mathsf{fact}(x) &= x! \\
\mathsf{sg}(x) &= \text{als } x \neq 0 \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{cosg}(x) &= \text{als } x \neq 0 \text{ dan } 0 \text{ anders } 1 \\
\mathsf{lt}(x,y) &= \text{als } x < y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{gt}(x,y) &= \text{als } x > y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{le}(x,y) &= \text{als } x \leq y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{ge}(x,y) &= \text{als } x \geq y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{eq}(x,y) &= \text{als } x = y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{ne}(x,y) &= \text{als } x \neq y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{max}(x,y) &= \text{het maximum van } x \text{ en } y \\
\mathsf{min}(x,y) &= \text{het minimum van } x \text{ en } y \\
\mathsf{quo}(x,y) &= \text{als } y \neq 0 \text{ dan } \lfloor x/y \rfloor \text{ anders } 0 \\
\mathsf{rem}(x,y) &= \text{als } y \neq 0 \text{ dan } x \bmod y \text{ anders } x \\
\mathsf{divides}(x,y) &= \text{als } y \neq 0 \text{ en } y \,|\, x \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{even}(x) &= \text{als } x \text{ even is dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{prime}(x) &= \text{als } x \text{ priem is dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{pn}(x) &= \text{het } x\text{-de priemgetal} \\
& \text{(dus } \mathsf{pn}(0) = 2,\ \mathsf{pn}(1) = 3, \text{ etc.)}
\end{aligned}
$$