Berekenbaarheid 2011, uitwerkingen toets 2

1. (a) $M_1(000) = 111$
   (b) $M_1(100)\uparrow$
   (c) $L(M_1) = \{w \in \{0,1\}^* \mid w = \lambda \text{ of } w \text{ begint met een } 0\}$
   (d) $R(M_1) = 00010111011011101100110101101101100110110101101000$
   (e) $R(M_1) \in L(M_1)$ want $R(M_1)$ begint met een 0.

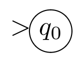
2. L_2 is recursief opsombaar want hij wordt geaccepteerd door stoppen door de machine M_2 die het volgende ontwerp volgt:

   - controleer of de input een valide code $R(M)$ is van een Turing machine: zo nee, ga in non-terminerende loop naar rechts op de tape
   - doe nu de berekening van de universele Turing machine U op de input

   Omdat $U(R(M)) = U(R(M)\lambda) = M(\lambda)$ stopt deze tweede stap precies dan wanneer $M(\lambda)\downarrow$.

3. Het probleem P_3 vraagt naar een eigenschap van de taal $L(M)$, dus de onbeslisbaarheid van dit probleem volgt uit de stelling van Rice als we laten zien dat het een niet-triviaal probleem is.

   Definieer de machine M_3 als:

   Dan geldt dat $L(M_3) = \{0,1\}^*$ en dus $1w \in L(M_3)$ voor alle woorden w.

   Het probleem is niet-triviaal want voor machine M_1 uit opgave 1 is het antwoord 'ja' – neem $w = 00$ en gebruik opgaven 1a en 1b – en voor de machine M_3 is het antwoord 'nee'.

4. De onbeslisbaarheid van dit probleem volgt met een reductie van het blank tape probleem B naar dit probleem P_4.

   Stel we willen weten van een machine M of $M(\lambda)\downarrow$ en we mogen aannemen dat we een machine hebben die probleem P_4 beslist. Maak een machine M' die het volgende ontwerp volgt:

   - wis de tape
   - doe de berekening van M
   - wis de tape

   Als de berekening van M op de lege tape stopt, dan stopt $M'(w)$ ook voor iedere w en geldt dan $M'(w) = \lambda$, en dus geeft probleem P_4 dan antwoord 'ja' voor M'. Als de berekening van M' op de lege tape niet stopt, dan stopt $M'(w)$ bij de tweede stap natuurlijk ooit nooit, en geeft probleem P_4 dus antwoord 'nee' voor M'.

   Het antwoord van P_4 voor M' geeft dus het antwoord van B voor M. Maar omdat B onbeslisbaar is, kan er daarom ook geen machine bestaan die P_4 kan beslissen, en is probleem P_4 dus ook onbeslisbaar.