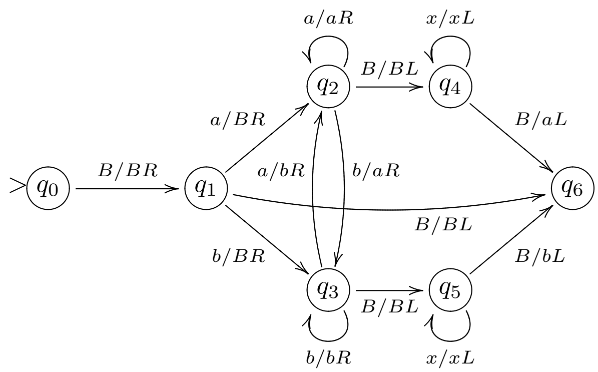
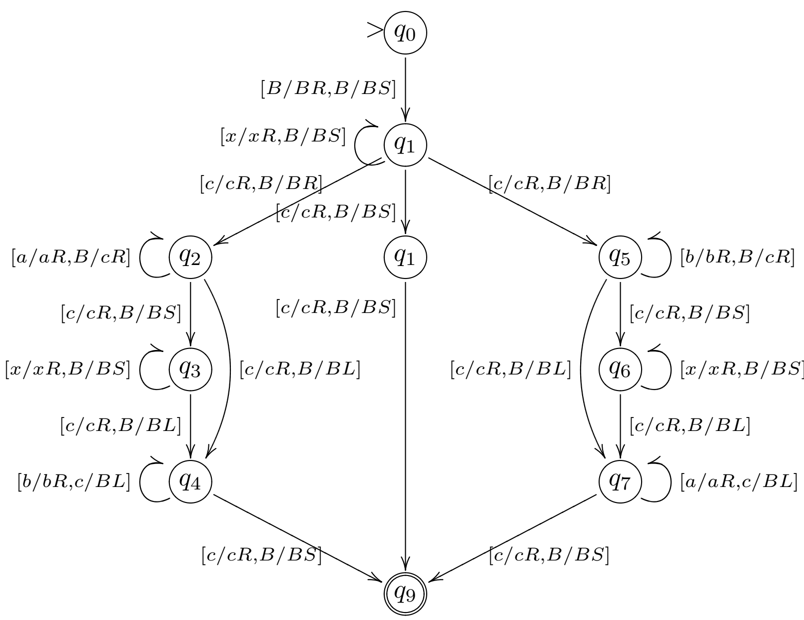
Berekenbaarheid 2011, uitwerkingen tentamen

1.



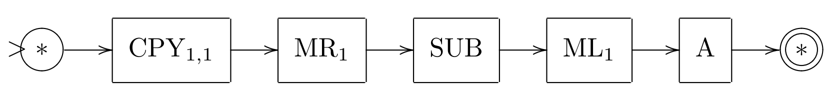
$x \in \{a, b\}$

2. Het kan zelfs wel in $|w| + 1$ stappen:



$x \in \{a, b, c\}$

3.



4. Dit is te beslissen door de universele Turing machine te modificeren zodanig dat hij op een extra tape een teller bijhoudt van het aantal stappen dat al gedaan is. Als deze teller bij 100 aankomt zonder dat de berekening al is gestopt geeft de machine een negatief antwoord, terwil als de berekening stopt vóór de teller bij 100 aankomt, dan geeft de machine een positief antwoord.

5. Dit probleem valt niet onder stelling van Rice, want correspondeert niet met een eigenschap van de taal die wordt herkend. Twee machines, één die altijd meteen stopt, en één die altijd na 200 stappen stopt, herkennen allebei de hele taal Σ^*, maar ze verschillen voor dit probleem.

   Dit probleem kan onbeslisbaar worden bewezen door het blank tape probleem naar dit probleem te reduceren. Hiervoor moeten we een effectieve constructie geven die uit een machine M een machine M' maakt op zo'n manier dat M stopt met input de lege tape (de eigenschap van het blank tape probleem) precies dan als M' stopt in ≥ 100 stappen (de eigenschap van probleem P_5.)

   Maar dat is eenvoudig te realiseren: laat M' eerst 100 stappen doen die niets aan de tape veranderen en aan het eind weer terugkomen op het vakje aan het begin van de tape, en laat M' vervolgens uit de machine M bestaan.

6. Omdat compositie bij Sudkamp strict is, zijn drie functies alledrie gelijk aan de lege functie e, ofwel

$$f_1 = f_2 = f_3 = e$$

   Deze functies hebben dus ariteit 1, hebben de lege verzameling als domein, zijn niet primitief recursief (want niet totaal) maar wel μ-recursief (want e is te definiëren als $e(x) = \mu y.0$).

7.

$$\begin{array}{rcl}
f_7(3,5) & = & 5 \\
\\
g(x) & = & x \\
h(x,y,w) & = & w + \mathsf{ge}(y,x) \\
\\
g & = & p_1^{(1)} \\
h & = & \mathsf{add} \circ (p_3^{(3)}, \mathsf{ge} \circ (p_2^{(3)}, p_1^{(3)})) \\
\\
f_7 & = & \mathsf{primrec}(g,h) \\
 & = & \mathsf{primrec}\big(p_1^{(1)},\ \mathsf{add} \circ (p_3^{(3)}, \mathsf{ge} \circ (p_2^{(3)}, p_1^{(3)}))\big)
\end{array}$$

   De functie f_7 is primitief recursief, want is te schrijven met primitieve recursie en compositie in termen van primitief recursieve functies.

8. Deze functie is μ-recursief, want is te schrijven als

$$f_8(x) = c_1^{(1)}\big(\mu y_2.\, \mathsf{le}((\mu y_1 \leq y_2.\, \mathsf{ge}(y_1, x) \cdot k(y_1, y_2)), y_2)\big)$$