Berekenbaarheid 2012
Tentamen
30 januari 2013

Voor je verder leest, schrijf je naam, studentnummer en studierichting op het antwoordvel. Er zijn 9 opgaven die ieder 10 punten opleveren, de eerste 10 punten zijn gratis, en het eindcijfer is het aantal punten gedeeld door 10. Turing machines moeten altijd gegeven worden door middel van een toestandsdiagram met rondjes en pijlen, en dus *niet* als een tabel. Veel succes!

1. Geef een implementatie van de SUB macro, zoals die ook voorkomt in de lijst macro's op pagina 3. Als je wil mag je hulpsymbolen gebruiken. Met begintoestand
$$\ldots \underset{\uparrow}{B} \;\; \overline{n} \;\; B \;\; \overline{m} \;\; B \ldots$$
moet de machine termineren in de toestand
$$\ldots \underset{\uparrow}{B} \, \overline{n \dot{-} m} \, B B^k B \ldots$$
(waarbij $k = m + \mathsf{min}(m, n) + 1$, zodat de ruimte die is vrijgekomen nu geheel uit blanks bestaat). Zorg ervoor dat je machine aan de eisen van een macro voldoet.

2. Geef een non-deterministische 2-tape Turing machine die de taal
$$L_2 \;\; := \;\; \{uvu^R w \mid u \in \{a,b,c\}^*, v \in \{a,b\}^*, w \in \{a,b\}^*\}$$
herkent door eindtoestand. Zorg ervoor dat een woord w uit deze taal wordt geaccepteerd in ten hoogste $\mathsf{length}(w) + 5$ stappen.

3. Gebruik de macro's uit de lijst op pagina 3 om een Turing machine te definiëren die de functie
$$\mathsf{minus}(n, m) \;\; := \;\; \begin{cases} n - m & \text{als } m \leq n \\ \uparrow & \text{anders} \end{cases}$$
berekent. Deze Turing machine moet zelf ook weer aan de eisen van een macro voldoen. Let op, je mag hierbij de SUB macro gebruiken. Hint: gebruik de SUB macro ook om te kijken of $m > n$.

4. Geef een Turing machine M_4 met input alfabet $\Sigma = \{0, 1\}$ die de lege taal herkent door stoppen. Geef vervolgens de code $R(M_4)$ van deze machine. Voor de codering van transities, zie het citaat uit het boek van Sudkamp op pagina 4.

5. Laat zien dat het probleem P_5 onbeslisbaar is dat vraagt of, gegeven een Turing machine M, er een $w \in \{0, 1\}^*$ bestaat met $M(101010) = w$. Valt dit probleem onder de stelling van Rice? Verklaar je antwoord.

6. Laat zien dat het probleem P_6 onbeslisbaar is dat vraagt of, gegeven een Turing machine M, er een $w \in \{0, 1\}^*$ bestaat met $M(w) = 101010$. Valt dit probleem onder de stelling van Rice? Verklaar je antwoord.

7. Is het mogelijk dat er functies f_1 en f_2 bestaan met $f_1 \circ f_2 = \mathsf{id}$ (de identieke functie) en $f_2 \circ f_1 = e$ (de lege functie)? Verklaar je antwoord.

8. We defininiëren een functie hyper_4 door de recursievergelijkingen:

$$\begin{aligned} \mathsf{hyper}_4(x, 0) &= 1 \\ \mathsf{hyper}_4(x, y + 1) &= x^{\mathsf{hyper}_4(x,y)} \end{aligned}$$

Bereken $\mathsf{hyper}_4(2, 3)$. Geef vervolgens functies g en h zodat

$$\mathsf{hyper}_4 = \mathsf{primrec}(g, h)$$

Schrijf deze twee functies g en h (ook) als compositie van primitief recursieve functies uit de lijst op pagina 4. Geef tenslotte de ariteiten van de drie functies hyper_4, g en h.

9. We definiëren een functie k door

$$k(x, y) \quad := \quad \begin{cases} 1 & \text{als er een priemgetal } p \geq y \text{ bestaat dat } x \text{ deelt} \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$

Bereken $k(12, 4)$. Laat vervolgens zien dat k primitief recursief is. Je mag hierbij gebruiken dat de functies uit de lijst op pagina 4 primitief recursief zijn.

Macro's voor Turing machines voor numerieke berekeningen

$$\longrightarrow\boxed{\text{S}}\longrightarrow \qquad \begin{array}{l} \underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\quad BB \\ \underset{\uparrow}{B}\,\overline{n+1}\,B \end{array}$$

$$\longrightarrow\boxed{\text{Z}}\longrightarrow \qquad \begin{array}{l} \underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\qquad B \\ \underset{\uparrow}{B}\,\overline{0}\ldots B \end{array}$$

$$\longrightarrow\boxed{\text{E}}\longrightarrow \qquad \begin{array}{l} \underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B \\ \textit{termineert niet} \end{array}$$

$$\longrightarrow\boxed{\text{P}_i^{(k)}}\longrightarrow \qquad \begin{array}{l} \underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B \\ \underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_i}\;\;B\ldots\quad\ldots B \end{array}$$

$$\longrightarrow\boxed{\text{C}_m^{(k)}}\longrightarrow \qquad \begin{array}{l} \underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B \\ \underset{\uparrow}{B}\,\overline{m}\;\;B\ldots\quad\ldots B \end{array}$$

$$\longrightarrow\boxed{\text{A}}\longrightarrow \qquad \begin{array}{l} \underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B\,\overline{m}\quad B \\ \underset{\uparrow}{B}\,\overline{n+m}\,BB \end{array}$$

$$\longrightarrow\boxed{\text{D}}\longrightarrow \qquad \begin{array}{l} \underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\qquad\quad B \\ \underset{\uparrow}{B}\,\overline{n\dot{-}1}\ldots B \end{array}$$

$$\longrightarrow\boxed{\text{SUB}}\longrightarrow \qquad \begin{array}{l} \underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B\,\overline{m}\qquad B \\ \underset{\uparrow}{B}\,\overline{n\dot{-}m}\ldots B \end{array}$$

$$\longrightarrow\boxed{\text{MULT}}\longrightarrow \qquad \begin{array}{l} \underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B\,\overline{m}\,B\ldots \\ \underset{\uparrow}{B}\,\overline{n\cdot m}\,B\ldots \end{array}$$

$$\longrightarrow\boxed{\text{MR}_k}\longrightarrow \qquad \begin{array}{l} \underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B \\ B\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,\underset{\uparrow}{B} \end{array}$$

$$\longrightarrow\boxed{\text{ML}_k}\longrightarrow \qquad \begin{array}{l} B\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,\underset{\uparrow}{B} \\ \underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B \end{array}$$

$$\longrightarrow\boxed{\text{FR}}\longrightarrow \qquad \begin{array}{l} \underset{\uparrow}{B}B^i\,\overline{n}\,B \qquad (i\geq 0) \\ B^i\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B \end{array}$$

$$\longrightarrow\boxed{\text{FL}}\longrightarrow \qquad \begin{array}{l} B\,\overline{n}\,B^i\underset{\uparrow}{B} \qquad (i\geq 0) \\ \underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B^iB \end{array}$$

$$\longrightarrow\boxed{\text{E}_k}\longrightarrow \qquad \begin{array}{l} \underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B \\ \underset{\uparrow}{B}\ldots\qquad\qquad\ldots B \end{array}$$

$$\longrightarrow\boxed{\text{T}}\longrightarrow \qquad \begin{array}{l} \underset{\uparrow}{B}B^i\,\overline{n}\,B \qquad (i\geq 0) \\ \underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B^iB \end{array}$$

$$\longrightarrow\boxed{\text{INT}}\longrightarrow \qquad \begin{array}{l} \underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B\,\overline{m}\,B \\ \underset{\uparrow}{B}\,\overline{m}\,B\,\overline{n}\,B \end{array}$$

$$\longrightarrow\boxed{\text{CPY}_k}\longrightarrow \qquad \begin{array}{l} \underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B\ldots\qquad\qquad\ldots B \\ \underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B \end{array}$$

$$\longrightarrow\boxed{\text{CPY}_{k,i}}\longrightarrow \qquad \begin{array}{l} \underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B\,\overline{n_{k+1}}\,B\ldots B\,\overline{n_{k+i}}\,B\ldots\qquad\qquad\ldots B \\ \underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B\,\overline{n_{k+1}}\,B\ldots B\,\overline{n_{k+i}}\,B\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B \end{array}$$

$$\longrightarrow\boxed{\text{BRN}}\xrightarrow{n=0} \qquad \begin{array}{l} \underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B \\ \underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B \end{array}$$

$$\Big\downarrow{\scriptstyle n>0}$$

Codering van transities

Symbol	Encoding
0	1
1	11
B	111
q_0	1
q_1	11
$\vdots$	$\vdots$
q_n	1^{n+1}
L	1
R	11

Let $en(x)$ denote the encoding of a symbol x. A transition $\delta(q_i, x) = [q_j, y, d]$ is encoded by the string

$$en(q_i)0en(x)0en(q_j)0en(y)0en(d).$$

Primitief recursieve functies

$$\begin{aligned}
\mathsf{id}(x) &= x \\
z(x) &= 0 \\
s(x) &= x + 1 \\
p_i^{(k)}(x_1, \ldots, x_k) &= x_i \\
c_n^{(k)}(x_1, \ldots, x_k) &= n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathsf{pred}(y) &= y \mathbin{\dot{-}} 1 \\
\mathsf{add}(x, y) &= x + y \\
\mathsf{mult}(x, y) &= x \cdot y \\
\mathsf{sub}(x, y) &= x \mathbin{\dot{-}} y \\
\mathsf{exp}(x, y) &= x^y \\
\mathsf{fact}(x) &= x! \\
\mathsf{sg}(x) &= \text{als } x \neq 0 \text{ dan 1 anders 0} \\
\mathsf{cosg}(x) &= \text{als } x \neq 0 \text{ dan 0 anders 1} \\
\mathsf{lt}(x, y) &= \text{als } x < y \text{ dan 1 anders 0} \\
\mathsf{gt}(x, y) &= \text{als } x > y \text{ dan 1 anders 0} \\
\mathsf{le}(x, y) &= \text{als } x \leq y \text{ dan 1 anders 0} \\
\mathsf{ge}(x, y) &= \text{als } x \geq y \text{ dan 1 anders 0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathsf{eq}(x, y) &= \text{als } x = y \text{ dan 1 anders 0} \\
\mathsf{ne}(x, y) &= \text{als } x \neq y \text{ dan 1 anders 0} \\
\mathsf{max}(x, y) &= \text{het maximum van } x \text{ en } y \\
\mathsf{min}(x, y) &= \text{het minimum van } x \text{ en } y \\
\mathsf{quo}(x, y) &= \text{als } y \neq 0 \text{ dan } \lfloor x/y \rfloor \text{ anders 0} \\
\mathsf{rem}(x, y) &= \text{als } y \neq 0 \text{ dan } x \bmod y \text{ anders } x \\
\mathsf{divides}(x, y) &= \text{als } y \neq 0 \text{ en } y \,|\, x \text{ dan 1 anders 0} \\
\mathsf{even}(x) &= \text{als } x \text{ even is dan 1 anders 0} \\
\mathsf{prime}(x) &= \text{als } x \text{ priem is dan 1 anders 0} \\
\mathsf{pn}(x) &= \text{het } x\text{-de priemgetal} \\
& \text{(dus } \mathsf{pn}(0) = 2,\ \mathsf{pn}(1) = 3, \text{ etc.)}
\end{aligned}$$