Berekenbaarheid 2012
Uitwerkingen Tentamen
30 januari 2013

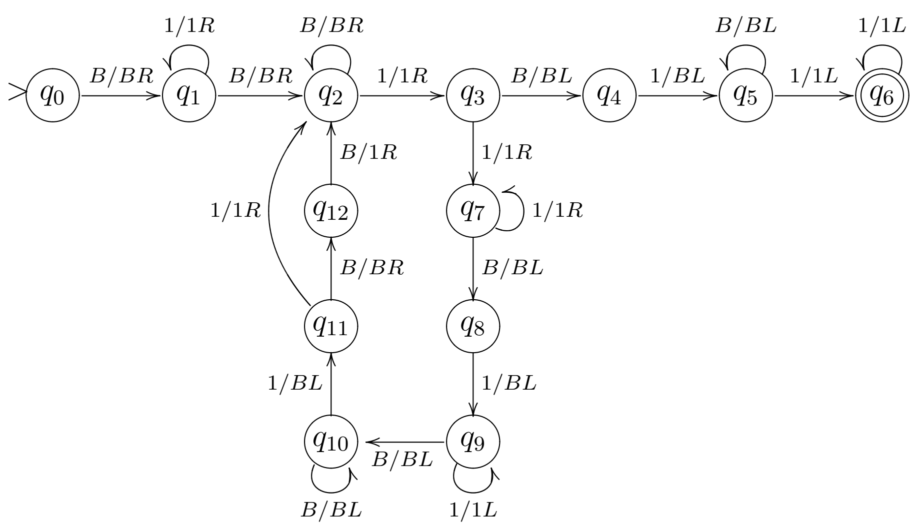
1. Geef een implementatie van de SUB macro, zoals die ook voorkomt in de lijst macro's op pagina 6. Als je wil mag je hulpsymbolen gebruiken. Met begintoestand

$$\ldots \underset{\uparrow}{B} \;\; \overline{n} \;\; B \;\; \overline{m} \;\; B \ldots$$

moet de machine termineren in de toestand

$$\ldots \underset{\uparrow}{B} \overline{n \dot{-} m}\, B B^k B \ldots$$

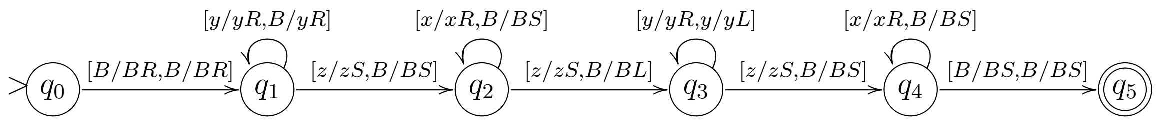
(waarbij $k = m + \mathsf{min}(m, n) + 1$, zodat de ruimte die is vrijgekomen nu geheel uit blanks bestaat). Zorg ervoor dat je machine aan de eisen van een macro voldoet.



2. Geef een non-deterministische 2-tape Turing machine die de taal

$$L_2 \;\; := \;\; \{uvu^R w \mid u \in \{a, b, c\}^*, v \in \{a, b\}^*, w \in \{a, b\}^*\}$$

herkent door eindtoestand. Zorg ervoor dat een woord w uit deze taal wordt geaccepteerd in ten hoogste $\mathsf{length}(w) + 5$ stappen.

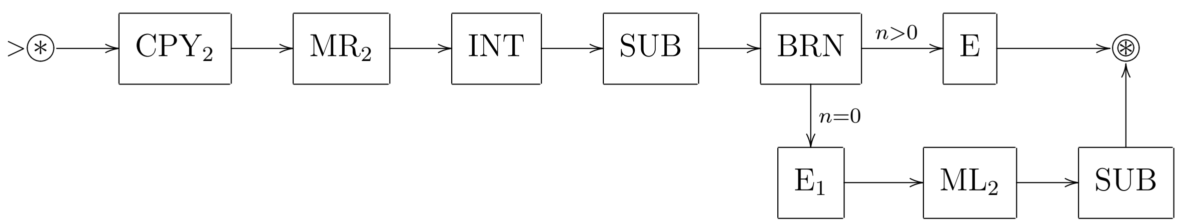


$x \in \{a, b\}$, $y \in \{a, b, c\}$, $z \in \{B, a, b, c\}$

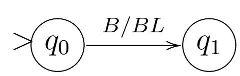
3. Gebruik de macro's uit de lijst op pagina 6 om een Turing machine te definiëren die de functie

$$\mathsf{minus}(n, m) \quad := \quad \begin{cases} n - m & \text{als } m \leq n \\ \uparrow & \text{anders} \end{cases}$$

berekent. Deze Turing machine moet zelf ook weer aan de eisen van een macro voldoen. Let op, je mag hierbij de SUB macro gebruiken. Hint: gebruik de SUB macro ook om te kijken of $m > n$.



4. Geef een Turing machine M_4 met input alfabet $\Sigma = \{0, 1\}$ die de lege taal herkent door stoppen. Geef vervolgens de code $R(M_4)$ van deze machine. Voor de codering van transities, zie het citaat uit het boek van Sudkamp op pagina 7.



$$R(M_4) = 00010111011011101000$$

(Merk op dat de lege taal geen enkel woord bevat, dus ook niet het lege woord λ.)

5. Laat zien dat het probleem P_5 onbeslisbaar is dat vraagt of, gegeven een Turing machine M, er een $w \in \{0,1\}^*$ bestaat met $M(101010) = w$. Valt dit probleem onder de stelling van Rice? Verklaar je antwoord.

   Dit valt onder de stelling van Rice, want de vraag is equivalent aan de vraag of $101010 \in L(M)$, en dit is een eigenschap van de taal van M.

   We moeten alleen nog laten zien dat de eigenschap niet triviaal is. De machine die voor iedere input stopt voldoet wel aan de eigenschap, terwijl de machine die oneindig naar rechts op de tape loopt er niet aan voldoet.

   (Er is hier een subtiliteit: het is noch in het boek van Sudkamp, noch in het college netjes gedefinieerd wat $M(w)$ is als de tape bij terminatie niet een woord vanaf vakje 1 bevat (omdat er bijv. blanks tussen de nullen en enen staan, of omdat er een niet-blank op vakje 0 staat.) Bij een onwelwillende definitie zou dan $M(w)$ niet in $\{0,1\}^*$ hoeven zitten, en zou de opgave niet met Rice te bewijzen zijn.

   Evenwel impliceert de notatie $M(w)$ dat de Turing machine een partiële functie van $\{0,1\}^*$ naar $\{0,1\}^*$ berekent, en zo was de opgave ook bedoeld, en tevens door de meeste studenten die aan het tentamen deelnamen opgevat.

   Twee mogelijke definities voor $R(w)$ zijn:

   - 'Alle symbolen vanaf vakje 1 tot de eerste blank.' Dus als de tape bij terminatie $110B0B\ldots$ bevat, is de output 10.
   - 'Alle niet blanke symbolen op de tape, geconcateneerd.' Dus als de tape bij terminatie $110B0B\ldots$ bevat, is de output 1100.

   Met beide definities is de opgave te maken zoals bedoeld.)

6. Laat zien dat het probleem P_6 onbeslisbaar is dat vraagt of, gegeven een Turing machine M, er een $w \in \{0,1\}^*$ bestaat met $M(w) = 101010$. Valt dit probleem onder de stelling van Rice? Verklaar je antwoord.

   Dit volgt met reductie van het blank tape probleem B naar dit probleem P_6.

   Nee, dit valt niet onder de stelling van Rice, want het gaat over de output van de machine, en dus niet alleen over de taal die de machine herkent.

Stel we hebben een M waarvan we willen weten of de berekening met als invoer een blanco tape stopt. We geven nu de machine M' aan P_6 die gedefinieerd is door:

- wis de tape
- voer M uit
- wis de tape
- zet 101010 op de tape

Dan geldt dat $M'(w) = 101010$ (voor iedere w) precies dan als $M(\lambda)\downarrow$. En dus geeft $P_6[M']$ het antwoord op $B[M]$.

(Er is hier een subtiliteit: om bij de derde stap de tape te wissen moet je bijgehouden hebben tot hoever M de tape heeft gebruikt, en ook moet je bij de derde stap weten waar het begin van de tape is. Dus moet M omgebouwd worden zodat hij met een symbool als # bijhoudt wat het stuk van de tape is dat is gebruikt. En ook moet M' vervolgens zo omgebouwd worden dat hij als tape alfabet $\{B, 0, 1\}$ heeft, anders kun je de code $R(M')$ niet als input voor P_6 gebruiken.)

7. Is het mogelijk dat er functies f_1 en f_2 bestaan met $f_1 \circ f_2 = \mathsf{id}$ (de identieke functie) en $f_2 \circ f_1 = e$ (de lege functie)? Verklaar je antwoord.

   Nee, dit is niet mogelijk.

   Met een bewijs uit het ongerijmde: neem aan dat we f_1 en f_2 hebben die aan deze eisen voldoen. We hebben $\mathsf{id}(0) = 0$, en dus $f_1(f_2(0)) = 0$. Daarom is er een n met $f_2(0) = n$ en $f_1(n) = 0$. Maar dan is $f_2(f_1(n)) = f_2(0) = n$. En dat kan niet want $(f_2 \circ f_1)(n)$ moet ongedefinieerd zijn. Dit is een tegenspraak, en dus geldt de aanname niet, en bestaan zulke f_1 en f_2 niet.

8. We defininiëren een functie hyper_4 door de recursievergelijkingen:

$$\begin{aligned} \mathsf{hyper}_4(x, 0) &= 1 \\ \mathsf{hyper}_4(x, y+1) &= x^{\mathsf{hyper}_4(x,y)} \end{aligned}$$

   Bereken $\mathsf{hyper}_4(2, 3)$. Geef vervolgens functies g en h zodat

$$\mathsf{hyper}_4 = \mathsf{primrec}(g, h)$$

Schrijf deze twee functies g en h (ook) als compositie van primitief recursieve functies uit de lijst op pagina 7. Geef tenslotte de ariteiten van de drie functies hyper_4, g en h.

$$\mathsf{hyper}_4(2,3) = 2^{2^2} = 16$$

De functies g en h die corresponderen met de recursievergelijkingen zijn:

$$\begin{aligned} g(x) &= 1 \\ h(x,y,w) &= x^w \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g &= c_1^{(1)} \\ h &= \mathsf{exp} \circ (p_1^{(3)}, p_3^{(3)}) \end{aligned}$$

De ariteiten zijn:

$$\begin{aligned} \mathsf{arity}(\mathsf{hyper}_4) &= 2 \\ \mathsf{arity}(g) &= 1 \\ \mathsf{arity}(h) &= 3 \end{aligned}$$

9. We definiëren een functie k door

$$k(x,y) \quad := \quad \begin{cases} 1 & \text{als er een priemgetal } p \geq y \text{ bestaat dat } x \text{ deelt} \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$

Bereken $k(12,4)$. Laat vervolgens zien dat k primitief recursief is. Je mag hierbij gebruiken dat de functies uit de lijst op pagina 7 primitief recursief zijn.

$$k(12,4) = 0$$

$$k(x,y) \quad = \quad \mathsf{sg}(\sum_{p=y}^{x}(\mathsf{prime}(p) \cdot \mathsf{divides}(x,p)))$$

Uit het feit dat we k op deze manier kunnen schrijven volgt dat hij primitief recursief is.

Macro's voor Turing machines voor numerieke berekeningen

$\rightarrow\boxed{\mathrm{S}}\rightarrow$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\quad BB$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n+1}\,B$
$\rightarrow\boxed{\mathrm{Z}}\rightarrow$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\quad B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{0}\ldots B$
$\rightarrow\boxed{\mathrm{E}}\rightarrow$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B$	*termineert niet*
$\rightarrow\boxed{\mathrm{P}_i^{(k)}}\rightarrow$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_i}\;\;B\ldots\quad\ldots B$
$\rightarrow\boxed{\mathrm{C}_m^{(k)}}\rightarrow$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{m}\;\;B\ldots\quad\ldots B$
$\rightarrow\boxed{\mathrm{A}}\rightarrow$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B\,\overline{m}\quad B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n+m}\,BB$
$\rightarrow\boxed{\mathrm{D}}\rightarrow$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\qquad B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n\dot{-}1}\ldots B$
$\rightarrow\boxed{\mathrm{SUB}}\rightarrow$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B\,\overline{m}\quad B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n\dot{-}m}\ldots B$
$\rightarrow\boxed{\mathrm{MULT}}\rightarrow$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B\,\overline{m}\,B\ldots$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n\cdot m}\,B\ldots$
$\rightarrow\boxed{\mathrm{MR}_k}\rightarrow$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B$	$B\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,\underset{\uparrow}{B}$
$\rightarrow\boxed{\mathrm{ML}_k}\rightarrow$	$B\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,\underset{\uparrow}{B}$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B$
$\rightarrow\boxed{\mathrm{FR}}\rightarrow$	$\underset{\uparrow}{B}B^i\,\overline{n}\,B\qquad(i\geq 0)$	$B^i\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B$
$\rightarrow\boxed{\mathrm{FL}}\rightarrow$	$B\,\overline{n}\,B^i\underset{\uparrow}{B}\qquad(i\geq 0)$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B^iB$
$\rightarrow\boxed{\mathrm{E}_k}\rightarrow$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B$	$\underset{\uparrow}{B}\ldots\qquad\ldots B$
$\rightarrow\boxed{\mathrm{T}}\rightarrow$	$\underset{\uparrow}{B}B^i\,\overline{n}\,B\qquad(i\geq 0)$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B^iB$
$\rightarrow\boxed{\mathrm{INT}}\rightarrow$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B\,\overline{m}\,B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{m}\,B\,\overline{n}\,B$
$\rightarrow\boxed{\mathrm{CPY}_k}\rightarrow$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B\ldots\qquad\ldots B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B$
$\rightarrow\boxed{\mathrm{CPY}_{k,i}}\rightarrow$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B\,\overline{n_{k+1}}\,B\ldots B\,\overline{n_{k+i}}\,B\ldots\qquad\ldots B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B\,\overline{n_{k+1}}\,B\ldots B\,\overline{n_{k+i}}\,B\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B$
$\rightarrow\boxed{\mathrm{BRN}}\xrightarrow{n=0}$, $\downarrow n>0$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B$

Codering van transities

Symbol	Encoding
0	1
1	11
B	111
q_0	1
q_1	11
$\vdots$	$\vdots$
q_n	1^{n+1}
L	1
R	11

Let $en(x)$ denote the encoding of a symbol x. A transition $\delta(q_i, x) = [q_j, y, d]$ is encoded by the string

$$en(q_i)0en(x)0en(q_j)0en(y)0en(d).$$

Primitief recursieve functies

$$\begin{aligned}
\mathsf{id}(x) &= x \\
z(x) &= 0 \\
s(x) &= x+1 \\
p_i^{(k)}(x_1, \ldots, x_k) &= x_i \\
c_n^{(k)}(x_1, \ldots, x_k) &= n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathsf{pred}(y) &= y \dot{-} 1 \\
\mathsf{add}(x,y) &= x + y \\
\mathsf{mult}(x,y) &= x \cdot y \\
\mathsf{sub}(x,y) &= x \dot{-} y \\
\mathsf{exp}(x,y) &= x^y \\
\mathsf{fact}(x) &= x! \\
\mathsf{sg}(x) &= \text{als } x \neq 0 \text{ dan 1 anders 0} \\
\mathsf{cosg}(x) &= \text{als } x \neq 0 \text{ dan 0 anders 1} \\
\mathsf{lt}(x,y) &= \text{als } x < y \text{ dan 1 anders 0} \\
\mathsf{gt}(x,y) &= \text{als } x > y \text{ dan 1 anders 0} \\
\mathsf{le}(x,y) &= \text{als } x \leq y \text{ dan 1 anders 0} \\
\mathsf{ge}(x,y) &= \text{als } x \geq y \text{ dan 1 anders 0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathsf{eq}(x,y) &= \text{als } x = y \text{ dan 1 anders 0} \\
\mathsf{ne}(x,y) &= \text{als } x \neq y \text{ dan 1 anders 0} \\
\mathsf{max}(x,y) &= \text{het maximum van } x \text{ en } y \\
\mathsf{min}(x,y) &= \text{het minimum van } x \text{ en } y \\
\mathsf{quo}(x,y) &= \text{als } y \neq 0 \text{ dan } \lfloor x/y \rfloor \text{ anders 0} \\
\mathsf{rem}(x,y) &= \text{als } y \neq 0 \text{ dan } x \bmod y \text{ anders } x \\
\mathsf{divides}(x,y) &= \text{als } y \neq 0 \text{ en } y \,|\, x \text{ dan 1 anders 0} \\
\mathsf{even}(x) &= \text{als } x \text{ even is dan 1 anders 0} \\
\mathsf{prime}(x) &= \text{als } x \text{ priem is dan 1 anders 0} \\
\mathsf{pn}(x) &= \text{het } x\text{-de priemgetal} \\
& \text{(dus } \mathsf{pn}(0) = 2,\ \mathsf{pn}(1) = 3, \text{ etc.)}
\end{aligned}$$