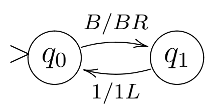
Berekenbaarheid 2012
Uitwerkingen Toets 2
14 december 2012

1. (a) Geef het toestandsdiagram van een Turing Machine M_1 die de taal

$$\{\lambda\} \cup \{0u \mid u \in \{0,1\}^*\}$$

herkent door stoppen.



(b) Geef een code $R(M_1)$ van deze Turing machine M_1. (Voor de beschrijving van de codering uit Sudkamp zie de achterzijde van dit blaadje.)

$$R(M_1) = 00010111011011101100110110101101000$$

(c) Wat doet M_1 met als invoer deze code $R(M_1)$? Verklaar je antwoord.

$R(M_1)$ begint met een 0, en dus zit dit woord in de taal die M_1 herkent. Dus stopt de berekening van M_1 met invoer $R(M_1)$, want M_1 herkent de taal door stoppen.

(d) Wat is de invoer voor een universele Turing machine U die correspondeert met de voorgaande vraag? Verklaar je antwoord.

Dit is $R(M_1)R(M_1)$.

Voor iedere $w \in \{0,1\}^*$ geldt dat $U(R(M_1)w) = M_1(w)$ volgens de definitie van een universele Turing machine. Als we voor w de code $R(M_1)$ nemen hebben we dus $U(R(M_1)R(M_1)) = M_1(R(M_1))$ en dat is de berekening uit de voorgaande vraag.

(e) Gegeven een machine H met de eigenschap dat voor alle $w \in \{0,1\}^*$ geldt dat $H(R(M_1)\,w) = 1$ als $M_1(w)\downarrow$, en $H(R(M_1)\,w) = 0$ als $M_1(w)\uparrow$, waarbij M_1 de machine uit de voorgaande vragen is.

Iemand definieert een machine D die het volgende doet:

(i) Verdubbel het woord op de tape. (Dus als er $R(M)$ stond staat er daarna $R(M)R(M)$.)

(ii) Voer H uit.

(iii) Als er nu 0 op de tape staat, stop. Als er 1 of nog iets anders op de tape staat, ga oneindig naar rechts.

Wat doet D met invoer $R(M_1)$? Verklaar je antwoord.

De berekening van D met invoer $R(M_1)$ zal niet stoppen: D zal uiteindelijk oneindig naar rechts lopen.

Bij stap (i) wordt de invoer $R(M_1)$ verdubbeld, na deze stap staat er dus $R(M_1)R(M_1)$ op de tape. Bij stap (ii) wordt H uitgevoerd met deze invoer, en omdat (volgens opgave 1(c)) we hebben dat $M_1(R(M_1))\downarrow$, heeft H de eigenschap dat er na deze stap 1 op de tape staat. Bij stap (iii) gaat vervolgens de machine oneindig naar rechts lopen.

(f) Kan H óók nog de eigenschap hebben dat voor alle $w \in \{0,1\}^*$ geldt dat $H(R(D)\,w) = 1$ als $D(w)\downarrow$, en $H(R(D)\,w) = 0$ als $D(w)\uparrow$, waarbij D de machine uit de voorgaande vraag is? Verklaar je antwoord.

Nee, dat kan niet.

(Merk op dat H tot nog toe makkelijk te implementeren was, en niet M_1 hoeft te simuleren: het is voldoende dat H kijkt of na het woord na de code met 0 begint. Maar deze extra eigenschap kan dus niet.)

Stel dat dat wel kan. Geef D dan de invoer $R(D)$. Dan geldt

$$D(R(D))\uparrow \iff H(R(D)R(D)) = 0 \iff D(R(D))\downarrow$$

waarbij de linkerequivalentie de eigenschap van H is, en de rechterequivalentie uit de constructie van D volgt. Maar dit is een tegenspraak.

2. (a) Laat E het probleem zijn of er voor een willekeurige Turing machine M een invoer w bestaat waarvoor de berekening van $M(w)$ stopt. Kun je de stelling van Rice gebruiken om dit probleem onbeslisbaar te bewijzen? Zo ja, laat op die manier de onbeslisbaarheid van dit probleem zien. Zo nee, waarom niet?

Ja, dit volgt uit de stelling van Rice. De eigenschap waar naar wordt gevraagd is equivalent aan $L(M) \neq 0$, en dit is een eigenschap van de taal van M.

We moeten alleen nog laten zien dat de eigenschap niet-triviaal is. Maar dit is zo, want er bestaat zowel een machine die voor geen enkele invoer stopt, als een machine die voor iedere invoer stopt.

(b) Laat zien hoe het blank tape probleem B reduceert naar dit probleem E.

Stel dat we een machine E heeft die probleem E oplost.

Dan moeten we gegeven een machine M een machine M' maken waarvoor geldt dat $E(R(M')) = 1$ precies dan als $M(\lambda)\downarrow$. Neem voor M' de machine die eerst zijn invoer wist, en dan M uitvoert. We hebben dan:

$$\begin{array}{ccccc} M(\lambda)\downarrow & \iff & L(M') = \{0,1\}^* & \iff & E(R(M')) = 1 \\ M(\lambda)\downarrow & \iff & L(M') = \{0,1\}^* & \iff & E(R(M')) = 0 \end{array}$$

Dus met E kunnen we B oplossen, en dus reduceert B naar E.

(c) Laat $E_{\leq 100}$ het probleem zijn of er bij een willekeurige machine M een invoer w bestaat waarvoor de berekening van $M(w)$ stopt in ten hoogste 100 stappen. Is dit probleem ook onbeslisbaar?

Nee, dit probleem is wel beslisbaar.

In 100 stappen kan een berekening alleen op de eerste 100 vakjes van de tape komen. Dus een beslissingsprocedure kan (met een modificatie van de universele Turing machine U) gewoon alle 3^{100} verschillende beginstukken proberen.

(Relevant stukje van p. 355 uit het boek van Sudkamp:)

A Turing machine M is defined by its transition function. A transition of a standard Turing machine has the form $\delta(q_i, x) = [q_j, y, d]$, where q_i, $q_j \in Q$; $x, y \in \Gamma$; and $d \in \{L, R\}$. We encode the elements of M using strings of 1's:

Symbol	Encoding
0	1
1	11
B	111
q_0	1
q_1	11
$\vdots$	$\vdots$
q_n	1^{n+1}
L	1
R	11

Let $en(x)$ denote the encoding of a symbol x. A transition $\delta(q_i, x) = [q_j, y, d]$ is encoded by the string

$$en(q_i)0en(x)0en(q_j)0en(y)0en(d).$$

The 0's separate the components of the transition. A representation of the machine is constructed from the encoded transitions. Two consecutive 0's are used to separate transitions. The beginnning and end of the representation are designated by three 0's.