Berekenbaarheid 2012
Uitwerkingen Toets 3
16 januari 2013

1. Geef numerieke functies f_1, f_2 en f_3 zodat geldt dat: (2 punten)

$$\begin{aligned} f_1 \circ (f_2, f_3) &= \mathsf{pred} \\ f_2 \circ f_3 &= s \end{aligned}$$

(Hierin zijn s en pred de successor en de predecessor.) Is het hierbij mogelijk dat één van deze functies f_1, f_2 en f_3 niet totaal is? Verklaar je antwoord. Geef ook van ieder van deze drie functies de ariteit.

$$\begin{array}{lll} f_1 = \mathsf{pred} \circ p_1^{(2)} & & \mathsf{arity}(f_1) = 2 \\ f_2 = \mathsf{id} & & \mathsf{arity}(f_2) = 1 \\ f_3 = s & & \mathsf{arity}(f_3) = 1 \end{array}$$

In deze oplossing zijn alle functies totaal, maar f_1 hoeft niet totaal te zijn. Als $f_3 = s$, dan kunnen we de waarde van $f_1(x, 0)$ ongedefinieerd maken, terwijl de gelijkheden blijven gelden. f_2 en f_3 moeten wel totaal zijn, want anders kan $f_1 \circ (f_2, f_3)$ niet een totale functie s zijn (want compositie is strict).

2. De volgende recursievergelijkingen vormen een recursieve definitie van een functie f: (3 punten)

$$\begin{aligned} f(x, 0) &= (x + 1)^2 \\ f(x, y + 1) &= f(x, y)^{\frac{f(x,y)}{x+1}} \end{aligned}$$

Geef de waarde van $f(1, 2)$. (Hierbij hoef je machten van 2 niet uit te rekenen.) Geef vervolgens functies g en h zodat

$$f = \mathsf{primrec}(g, h)$$

Schrijf deze functies g en h (ook) als compositie van functies op de achterzijde van dit blaadje. Geef tenslotte de ariteiten van f, g en h.

$$\begin{aligned} f(1, 0) &= (1 + 1)^2 = 2^2 = 4 \\ f(1, 1) &= 4^{\frac{4}{2}} = 4^2 = 16 \\ f(1, 2) &= 16^{\frac{16}{2}} = 16^8 = (2^4)^8 = 2^{32} = 4294967296 \end{aligned}$$

Vervolgens moet gelden:

$$\begin{aligned} f(x,0) &= g(x) \\ f(x,y+1) &= h(x,y,f(x,y)) \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat de volgende g en h voldoen:

$$\begin{aligned} g(x) &= (x+1)^2 \\ h(x,y,w) &= w^{\frac{w}{x+1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g &= (\mathsf{mult} \circ (\mathsf{id}, \mathsf{id})) \circ s \\ h &= \mathsf{exp} \circ (p_3^{(3)}, \mathsf{quo} \circ (p_3^{(3)}, s \circ p_1^{(3)})) \end{aligned}$$

Tenslotte zijn de ariteiten:

$$\begin{aligned} \mathsf{arity}(f) &= 2 \\ \mathsf{arity}(g) &= 1 \\ \mathsf{arity}(h) &= 3 \end{aligned}$$

3. We definiëren $\mathsf{primefactorsum}(x)$ voor $x > 0$ als de som van de priemfactoren van het argument x. Hierbij telt ieder priemgetal maar één keer mee. Omdat $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$, geldt dus $\mathsf{primefactorsum}(12) = 2+3 = 5$. Voorts is $\mathsf{primefactorsum}(0) = 0$. (3 punten)

   Laat zien dat de functie primefactorsum primitief recursief is. Je mag hierbij gebruiken dat de functies op de achterkant van dit blaadje primitief recursief zijn.

   We kunnen de definitie van primefactorsum schrijven als:

$$\mathsf{primefactorsum}(x) = \sum_{p=2}^{x} (\mathsf{prime}(p) \cdot \mathsf{divides}(x,p) \cdot p)$$

   Uit de vorm van deze definitie volgt dat de functie primefactorsum primitief recursief is.

4. Bestaan er μ-recursieve functies die niet primitief recursief zijn? Bewijs je antwoord. (1 punt)

   Ja.

   Primitief recursieve functies zijn altijd totaal. De drie manieren om primitief recursieve functies te maken zijn:

- de basisfuncties $c_0^{(0)}$, s en $p_i^{(k)}$
- compositie van primitief recursieve functies
- primitieve recursie uit primitief recursieve g en h

en deze manieren leveren altijd een totale functie op. Evenwel bestaan er wél niet-totale μ-recursieve functies.

Zo is $c_0^{(2)} = z \circ p_1^{(2)}$ een primitief recursieve functie (als compositie van twee basisfuncties), en dus is

$$e(x) \quad = \quad \mu z.\, c_0^{(2)}(x, z)$$

een μ-recursieve functie (want gedefinieerd met μ-recursie uit een primitief recursieve functie).

Maar $e(x)$ is niet totaal. Deze functie is zelfs voor geen enkel argument gedefinieerd, want de waarde $c_0^{(2)}(x, z)$ wordt nooit ongelijk aan 0.