Berekenbaarheid 2012
Uitwerkingen Inhaaltoets
18 januari 2013

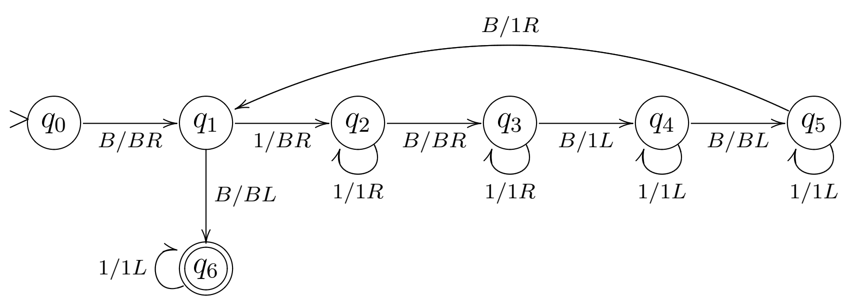
1. Geef een implementatie van de CPY_1 macro *die geen hulpsymbolen gebruikt*, dus met $\Gamma = \{B, 1\}$. Met begintoestand

$$\ldots \underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B B^{n+1} B \ldots$$

moet de machine termineren in de toestand

$$\ldots \underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B\,\overline{n} \quad B \ldots$$

Zorg ervoor dat je machine aan de eisen van een macro voldoet.



(Een 2-tape machine is niet een correcte uitwerking. Weliswaar bestaat er dan ook een 1-tape machine die dezelfde berekening doet, maar die gebruikt veel meer tape en is dus niet bruikbaar als macro.)

2. Het probleem P_n vraagt bij een Turing machine M – de input van dit probleem is dus de code $R(M)$ van een machine – of er een machine M' bestaat met ten hoogste n toestanden die dezelfde taal herkent als M, dus met $L(M) = L(M')$.

Laat zien dat dit probleem P_n voor iedere $n > 0$ onbeslisbaar is.

Hoewel het probleem iets zegt over het aantal toestanden van een Turing machine, valt het toch onder de stelling van Rice, want het vraagt *over* M alleen naar een eigenschap van de taal $L(M)$.

We moeten dus alleen laten zien dat dit probleem voor iedere $n > 0$ niet-triviaal is.

Er bestaat een machine met 1 toestand, en voor die machine geeft het probleem dus een positief antwoord. Evenwel bestaan er maar eindig veel machines met $\leq n$ toestanden, die dus maar eindig veel verschillende talen herkennen. Evenwel zijn wél oneindig veel recursief opsombare talen. (Zo zijn de talen $L_m := \{w \in \{0,1\} \mid \mathsf{length}(w) \leq m\}$ allemaal recursief opsombaar voor iedere m, en ook allemaal onderling verschillend.) Dus bestaat er ook altijd een recursieve taal, en dus een machine, waarvoor het probleem een negatief antwoord geeft.

3. Eulers indicatorfunctie φ is gedefinieerd voor argumenten ≥ 1 door

$$\varphi(p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_k^{n_k}) := p_1^{n_1-1}(p_1-1)\, p_2^{n_2-1}(p_2-1) \,\cdots\, p_k^{n_k-1}(p_k-1)$$

waarbij p_1, p_2, ..., p_k de verschillende priemfactoren van het argument van φ zijn. Bijvoorbeeld geldt:

$$\varphi(12) = \varphi(2^2 \cdot 3) = 2^1(2-1)\, 3^0(3-1) = 4$$

Voorts is de conventie dat $\varphi(0) = 1$.

Laat zien dat φ een primitief recursieve functie is. Je mag hierbij gebruiken dat de functies op de achterzijde van dit blaadje primitief recursief zijn.

Dit volgt uit het feit dat φ te definiëren valt door:

$$\varphi(x) = \prod_{p=2}^{x} \mathsf{prime}(p) \cdot \mathsf{divides}(x,p) \cdot \mathsf{exp}(p, \mathsf{pred}(\sum_{n=1}^{x} \mathsf{divides}(x,p^n))) \cdot \mathsf{pred}(p)$$

Dat deze formule ook klopt voor $x = 0$ is duidelijk, want dan staan de grenzen van het product verkeerd om.