Berekenbaarheid 2013
Tentamen
23 januari 2014

Voor je verder leest, schrijf je naam, studentnummer en studierichting op het antwoordvel. Er zijn 10 opgaven die ieder 9 punten opleveren, de eerste 10 punten zijn gratis, en het cijfer voor het tentamen is het aantal punten gedeeld door 10. Turing-machines moeten altijd gegeven worden door middel van een toestandsdiagram met rondjes en pijlen, en dus *niet* als een tabel. Veel succes!

1. Geef een standaard Turing-machine die de taal

$$L_1 := \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{\lambda, ab, aabb, \dots\}$$

herkent *door stoppen*. Je mag in je machine hulpsymbolen gebruiken. (Hint: maak eerst de machine die deze taal herkent door eindtoestand, en pas deze vervolgens aan. Je mag deze versie van de machine ook bij de uitwerking erbij geven, maar dat hoeft niet.)

2. Geef een non-deterministische 2-tape Turing-machine die de taal

$$L_2 := \{ucvcvcu' \mid u, u' \in \{a,b,c\}^*, v \in \{a,b\}^*\}$$

herkent door eindtoestand. Zo geldt bijv. dat $abccbcbc \in L_2$, met $u = abc$, $v = b$ en $u' = \lambda$. Zorg er voor dat een correcte input met lengte n wordt herkend in ten hoogste $\frac{3}{2}n + \frac{1}{2}$ stappen.

3. Geef een Turing-machine die de macro $\to\boxed{\mathrm{CPY}_1}\to$ implementeert, zoals beschreven op pagina 3. Je mag in deze machine hulpsymbolen gebruiken. Je moet de machine tot op toestanden uitwerken, dus je mag er geen andere macro's in gebruiken.

4. Gegeven macro's $\to\boxed{\mathrm{F}}\to$, $\to\boxed{\mathrm{G}_1}\to$ en $\to\boxed{\mathrm{G}_2}\to$ die de functies $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $g_1 : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ en $g_2 : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ implementeren. Definieer met behulp van deze macro's een macro die de functie

$$f \circ (g_1, g_2)$$

uitrekent. Hou er rekening mee dat je niet weet hoeveel tape deze macro's nodig zullen hebben. Je mag in je machine ook de macro's op pagina 3 gebruiken.

5. Geef een input van de universele Turing-machine U waarbij deze een Turing-machine simuleert die door stoppen bepaalt of

$$101010 \in \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ bevat een } 0\}$$

   Zie pagina 4 voor een relevant stukje uit het boek van Sudkamp.

6. Laat zien dat het probleem P_6 onbeslisbaar is dat vraagt of een gegeven Turing-machine M de eigenschap heeft dat er zowel geldt dat hij stopt bij input 1, als dat hij niet stopt bij input 0.

7. Laat zien dat het probleem P_7 onbeslisbaar is dat vraagt of een gegeven Turing-machine M bij input 0 stopt met output 1, ofwel of $M(0) = 1$.

8. Geef totale numerieke functies f_8 en g_8 met $f_8 \circ g_8 = \mathsf{id}$ en $g_8 \circ f_8 \neq \mathsf{id}$. Verklaar je antwoord. Geef vervolgens ook de ariteiten van f_8 en g_8.

9. Er zijn numerieke functies g en h met

$$\mathsf{mult} = \textbf{\textsf{primrec}}(g, h)$$

   Geef eerst de recursievergelijkingen voor mult. Geef vervolgens de ariteiten van g en h, en schrijf ze als compositie van functies uit het lijstje op pagina 4.

10. De numerieke functie ilog is gedefinieerd door

$$\mathsf{ilog}(x, y) = \begin{cases} \lfloor {}^x\log(y) \rfloor & \text{als } x \geq 2 \\ 0 & \text{als } x \leq 1 \end{cases}$$

   waarin ${}^x\log$ de logaritme met basis x is. We hebben bijv. $\mathsf{ilog}(2, 1000) = 9$, want ${}^2\log(1000) = 9,96578\ldots$. Dit correspondeert met $2^9 \leq 1000 < 2^{10}$.

   Laat zien dat ilog primitief recursief is. Je mag gebruiken dat de functies uit de lijst op pagina 4 alle primitief recursief zijn.

Macro's voor Turing-machines voor numerieke berekeningen

$\to \boxed{\mathrm{S}} \to$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\quad BB$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n+1}\,B$
$\to \boxed{\mathrm{Z}} \to$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\quad\; B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{0}\ldots B$
$\to \boxed{\mathrm{E}} \to$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B$	*termineert niet*
$\to \boxed{\mathrm{P}_i^{(k)}} \to$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_i}\;\;B\ldots\quad\ldots B$
$\to \boxed{\mathrm{C}_m^{(k)}} \to$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{m}\;\;B\ldots\quad\ldots B$
$\to \boxed{\mathrm{A}} \to$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B\,\overline{m}\quad B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n+m}\,BB$
$\to \boxed{\mathrm{D}} \to$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\qquad\quad B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n \mathbin{\dot{-}} 1}\ldots B$
$\to \boxed{\mathrm{SUB}} \to$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B\,\overline{m}\quad\; B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n \mathbin{\dot{-}} m}\ldots B$
$\to \boxed{\mathrm{MULT}} \to$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B\,\overline{m}\,B\ldots$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n\cdot m}\,B\ldots$
$\to \boxed{\mathrm{MR}_k} \to$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B$	$B\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,\underset{\uparrow}{B}$
$\to \boxed{\mathrm{ML}_k} \to$	$B\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,\underset{\uparrow}{B}$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B$
$\to \boxed{\mathrm{FR}} \to$	$\underset{\uparrow}{B}B^i\,\overline{n}\,B \qquad (i \geq 0)$	$B^i\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B$
$\to \boxed{\mathrm{FL}} \to$	$B\,\overline{n}\,B^i\underset{\uparrow}{B} \qquad (i \geq 0)$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B^iB$
$\to \boxed{\mathrm{E}_k} \to$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B$	$\underset{\uparrow}{B}\ldots\qquad\quad\ldots B$
$\to \boxed{\mathrm{T}} \to$	$\underset{\uparrow}{B}B^i\,\overline{n}\,B \qquad (i \geq 0)$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B^iB$
$\to \boxed{\mathrm{INT}} \to$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B\,\overline{m}\,B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{m}\,B\,\overline{n}\,B$
$\to \boxed{\mathrm{CPY}_k} \to$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B\ldots\qquad\quad\ldots B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B$
$\to \boxed{\mathrm{CPY}_{k,i}} \to$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B\,\overline{n_{k+1}}\,B\ldots B\,\overline{n_{k+i}}\,B\ldots\qquad\quad\ldots B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B\,\overline{n_{k+1}}\,B\ldots B\,\overline{n_{k+i}}\,B\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B$
$\to \boxed{\mathrm{BRN}} \xrightarrow{n=0}$, $\downarrow n>0$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B$

Codering van transities

Symbol	Encoding
0	1
1	11
B	111
q_0	1
q_1	11
$\vdots$	$\vdots$
q_n	1^{n+1}
L	1
R	11

Let $en(x)$ denote the encoding of a symbol x. A transition $\delta(q_i, x) = [q_j, y, d]$ is encoded by the string

$$en(q_i)0en(x)0en(q_j)0en(y)0en(d).$$

Primitief recursieve functies

$$\begin{aligned}
\mathsf{id}(x) &= x \\
z(x) &= 0 \\
s(x) &= x+1 \\
p_i^{(k)}(x_1,\ldots,x_k) &= x_i \\
c_n^{(k)}(x_1,\ldots,x_k) &= n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathsf{pred}(y) &= y \dot{-} 1 \\
\mathsf{add}(x,y) &= x+y \\
\mathsf{mult}(x,y) &= x \cdot y \\
\mathsf{sub}(x,y) &= x \dot{-} y \\
\mathsf{exp}(x,y) &= x^y \\
\mathsf{fact}(x) &= x! \\
\mathsf{sg}(x) &= \text{als } x \neq 0 \text{ dan 1 anders 0} \\
\mathsf{cosg}(x) &= \text{als } x \neq 0 \text{ dan 0 anders 1} \\
\mathsf{lt}(x,y) &= \text{als } x < y \text{ dan 1 anders 0} \\
\mathsf{gt}(x,y) &= \text{als } x > y \text{ dan 1 anders 0} \\
\mathsf{le}(x,y) &= \text{als } x \leq y \text{ dan 1 anders 0} \\
\mathsf{ge}(x,y) &= \text{als } x \geq y \text{ dan 1 anders 0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathsf{eq}(x,y) &= \text{als } x = y \text{ dan 1 anders 0} \\
\mathsf{ne}(x,y) &= \text{als } x \neq y \text{ dan 1 anders 0} \\
\mathsf{max}(x,y) &= \text{het maximum van } x \text{ en } y \\
\mathsf{min}(x,y) &= \text{het minimum van } x \text{ en } y \\
\mathsf{quo}(x,y) &= \text{als } y \neq 0 \text{ dan } \lfloor x/y \rfloor \text{ anders 0} \\
\mathsf{rem}(x,y) &= \text{als } y \neq 0 \text{ dan } x \bmod y \text{ anders } x \\
\mathsf{divides}(x,y) &= \text{als } y \neq 0 \text{ en } y \mid x \text{ dan 1 anders 0} \\
\mathsf{even}(x) &= \text{als } x \text{ even is dan 1 anders 0} \\
\mathsf{prime}(x) &= \text{als } x \text{ priem is dan 1 anders 0} \\
\mathsf{pn}(x) &= \text{het } x\text{-de priemgetal} \\
& \text{(dus } \mathsf{pn}(0) = 2,\ \mathsf{pn}(1) = 3, \text{ etc.)}
\end{aligned}$$