Berekenbaarheid 2013
Uitwerkingen Toets 3
15 januari 2014

1. (a) Geef numerieke functies f_1, f_2, f_3 en f_4 met

$$f_1(1,1,1) = 0$$
$$f_1 \circ (f_2, f_3, f_4) = \mathsf{add}$$

$$f_1(x,y,z) = \begin{cases} x+y+z-3 & \text{als } x+y+z \geq 3 \\ \uparrow & \text{anders} \end{cases}$$
$$f_2(x,y) = x+1$$
$$f_3(x,y) = y+1$$
$$f_4(x,y) = 1$$

   (b) Geef de ariteiten van deze vier functies, en laat zien dat deze kloppen met de functiecompositie uit de tweede vergelijking.

$$\mathsf{arity}(f_1) = 3$$
$$\mathsf{arity}(f_2) = 2$$
$$\mathsf{arity}(f_3) = 2$$
$$\mathsf{arity}(f_4) = 2$$

   De ariteit van f_1 is gelijk aan het aantal functies aan de rechterkant van de compositie, en de ariteiten van deze functies f_2, f_3 en f_4 zijn allemaal gelijk, en gelijk aan de ariteit van de hele compositie, i.e., de ariteit van de add functie.

   (c) Is het mogelijk dat f_1 onder deze voorwaarden niet totaal is? En is het ook mogelijk dat f_2 onder deze voorwaarden niet totaal is?
   Omdat compositie strict is moet f_2 totaal zijn, maar f_1 hoeft niet totaal te zijn, zoals ook blijkt uit het antwoord op vraag 1a.

2. (a) De numerieke functie xmod is gedefinieerd door de recursievergelijkingen:

$$\begin{aligned} \mathsf{xmod}(x, 0) &= 0 \\ \mathsf{xmod}(x, y+1) &= \mathsf{sg}(x \dot{-} s(\mathsf{xmod}(x, y))) \cdot s(\mathsf{xmod}(x, y)) \end{aligned}$$

Geef de waardes van $\mathsf{xmod}(3, 0)$, $\mathsf{xmod}(3, 1)$, $\ldots$, $\mathsf{xmod}(3, 4)$.

$$\begin{aligned} \mathsf{xmod}(3, 0) &= 0 \\ \mathsf{xmod}(3, 1) &= 1 \\ \mathsf{xmod}(3, 2) &= 2 \\ \mathsf{xmod}(3, 3) &= 0 \\ \mathsf{xmod}(3, 4) &= 1 \end{aligned}$$

(b) Geef numerieke functies g en h zodat

$$\mathsf{xmod} = \textbf{primrec}(g, h)$$

$$\begin{aligned} g(x) &= 0 \\ h(x, y, w) &= \mathsf{sg}(x \dot{-} s(w)) \cdot s(w) \end{aligned}$$

(c) Geef de ariteiten van de functies xmod, g en h, en laat zien dat deze kloppen met de definitie met primitieve recursie.

$$\begin{aligned} \mathsf{arity}(\mathsf{xmod}) &= 2 \\ \mathsf{arity}(g) &= 1 \\ \mathsf{arity}(h) &= 3 \end{aligned}$$

De ariteit van g is één kleiner dan van de gedefinieerde functie, en de ariteit van h is één groter.

(d) Schrijf de functies g en h als compositie van functies uit de lijst op de andere kant van dit blaadje.

$$\begin{aligned} g &= z \\ h &= \mathsf{mult} \circ (\mathsf{sg} \circ \mathsf{sub} \circ (p_1^{(3)}, s \circ p_3^{(3)}), s \circ p_3^{(3)}) \end{aligned}$$

3. (a) $k(x)$ is gedefinieerd als het kleinste getal $y \geq 1$ waarvoor

$$\{y, y+1, y+2, \ldots, (x+1)y - 1, (x+1)y\}$$

geen priemgetallen bevat. Als zo'n getal niet bestaat is $k(x)$ ongedefinieerd. Bereken $k(0)$.

$$k(0) = 1$$

want

$$\{1, \ldots, (0+1) \cdot 1\} = \{1\}$$

bevat geen priemgetallen, want 1 is geen priemgetal.

(b) Laat zien dat deze functie μ-recursief is. Je mag gebruiken dat de functies aan de achterkant van dit blaadje primitief recursief zijn.

Dit volgt uit het feit dat k te schrijven is als

$$k(x) = \mu y.\, [\mathsf{ge}(y, 1) \cdot \prod_{i=y}^{(x+1)\cdot y} \mathsf{cosg}(\mathsf{prime}(i))]$$