Berekenbaarheid 2014
Tentamen
6 mei 2015

Voor je verder leest, schrijf je naam, studentnummer en studierichting op het antwoordvel. Er zijn 10 opgaven die ieder 9 punten opleveren, de eerste 10 punten zijn gratis, en het cijfer voor het tentamen is het aantal punten gedeeld door 10. Turing-machines moeten altijd gegeven worden door middel van een toestandsdiagram met rondjes en pijlen, en dus *niet* als een tabel. Veel succes!

1. Geef een standaard Turing-machine M_1 met input alfabet $\Sigma = \{a, b\}$, die vóór ieder symbool uit de input een extra blank toevoegt. Als de machine wordt aangezet in de situatie

   $$\underset{\uparrow}{B}abbB\ldots$$

   moet hij dus termineren in de situatie

   $$\underset{\uparrow}{B}BaBbBbB\ldots$$

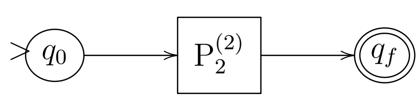
   Als je wil mag je hulpsymbolen gebruiken.

2. Geef een non-deterministische 2-tape Turing-machine die de taal

   $$L_2 := \{uvvu \mid u, v \in \{a, b\}^*\}$$

   herkent door eindtoestand. Een correcte input van lengte n moet worden herkend in ten hoogste $3n + 8$ stappen.

3. Geef de macro

   als Turing machine, dus met toestanden en transities. Als je wil mag je hulpsymbolen gebruiken. Je mag *niet* andere macro's gebruiken.

4. Geef een numerieke Turing-machine die de gammafunctie

$$\Gamma(x) := (x-1)!$$

uitrekent, waarbij $(x-1)! = 1 \cdot \ldots \cdot (x-1)$ de faculteitsfunctie is. Er geldt $\Gamma(0)\uparrow$, $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(2) = 1$, $\Gamma(3) = 2$, $\Gamma(4) = 6$, etc. Je mag gebruik maken van de macros op blz. 3.

5. Geef een Turing-machine M_5 waarvoor het niet beslisbaar is of deze machine stopt met gegeven input w. (De input van het onbeslisbare probleem dat bij M_5 hoort is dus het woord w.) Verklaar je antwoord.

6. Laat zien dat het probleem P_6 onbeslisbaar is dat vraagt of er bij een gegeven Turing-machine M maar eindig veel verschillende inputs bestaan waarvoor M stopt.

7. Laat zien dat het probleem P_7 onbeslisbaar is dat vraagt of er bij gegeven een Turing-machine M een input w bestaat die de machine ongemoeid laat, dus waarbij de machine stopt met nog steeds w op de tape.

8. Bestaan er functies $f_8 \neq e$ en $g_8 \neq e$ zodat $f_8 \circ g_8 = e$, waar e de 'lege' functie is die voor geen enkele input is gedefinieerd. Zo ja, geef voorbeelden van zulke functies en verklaar je antwoord. Zo nee, leg uit waarom niet.

9. Definieer de faculteitsfunctie

$$f_9(x) = x!$$

met primitieve recursie. Geef eerst de recursievergelijkingen, en schrijf vervolgens f_9 in de vorm **primrec**(g, h), waarbij g en h als compositie van functies uit de lijst op blz. 4 moeten worden gegeven.

10. Gegeven een primitief recursieve functie k van ariteit 2, definiëren we de functie f_{10} door:

$$f_{10}(x) = \begin{cases} 1 & \text{als er veelvouden } y_1 \text{ en } y_2 \text{ van } x \text{ bestaan met } k(y_1, y_2) \neq 0 \\ \uparrow & \text{anders} \end{cases}$$

Laat zien dat f_{10} een μ-recursieve functie is. Je mag gebruiken dat de functies op blz. 4 primitief recursief zijn.

Macro's voor Turing-machines voor numerieke berekeningen

S	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\quad BB$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n+1}\,B$
Z	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\quad B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{0}\ldots B$
E	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B$	*termineert niet*
$\mathrm{P}_i^{(k)}$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_i}\;B\ldots\quad\ldots B$
$\mathrm{C}_m^{(k)}$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{m}\;B\ldots\quad\ldots B$
A	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B\,\overline{m}\quad B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n+m}\,BB$
D	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\qquad B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n\mathbin{\dot{-}}1}\ldots B$
SUB	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B\,\overline{m}\quad B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n\mathbin{\dot{-}}m}\ldots B$
MULT	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B\,\overline{m}\,B\ldots$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n\cdot m}\,B\ldots$
MR_k	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B$	$B\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,\underset{\uparrow}{B}$
ML_k	$B\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,\underset{\uparrow}{B}$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B$
FR	$\underset{\uparrow}{B}B^i\,\overline{n}\,B\qquad (i\geq 0)$	$B^i\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B$
FL	$B\,\overline{n}\,B^i\underset{\uparrow}{B}\qquad (i\geq 0)$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B^iB$
E_k	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B$	$\underset{\uparrow}{B}\ldots\qquad\ldots B$
T	$\underset{\uparrow}{B}B^i\,\overline{n}\,B\qquad (i\geq 0)$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B^iB$
INT	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B\,\overline{m}\,B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{m}\,B\,\overline{n}\,B$
CPY_k	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B\ldots\qquad\ldots B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B$
$\mathrm{CPY}_{k,i}$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B\,\overline{n_{k+1}}\,B\ldots B\,\overline{n_{k+i}}\,B\ldots\qquad\ldots B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B\,\overline{n_{k+1}}\,B\ldots B\,\overline{n_{k+i}}\,B\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B$
BRN ($n=0$; $n>0$)	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B$

Primitief recursieve functies

$$
\begin{aligned}
\mathsf{id}(x) &= x \\
z(x) &= 0 \\
s(x) &= x+1 \\
p_i^{(k)}(x_1,\ldots,x_k) &= x_i \\
c_n^{(k)}(x_1,\ldots,x_k) &= n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{pred}(y) &= y \mathbin{\dot-} 1 \\
\mathsf{add}(x,y) &= x+y \\
\mathsf{mult}(x,y) &= x \cdot y \\
\mathsf{sub}(x,y) &= x \mathbin{\dot-} y \\
\mathsf{exp}(x,y) &= x^y \\
\mathsf{sg}(x) &= \text{als } x \neq 0 \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{cosg}(x) &= \text{als } x \neq 0 \text{ dan } 0 \text{ anders } 1 \\
\mathsf{lt}(x,y) &= \text{als } x < y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{gt}(x,y) &= \text{als } x > y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{le}(x,y) &= \text{als } x \leq y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{ge}(x,y) &= \text{als } x \geq y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{eq}(x,y) &= \text{als } x = y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{ne}(x,y) &= \text{als } x \neq y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{max}(x,y) &= \text{het maximum van } x \text{ en } y \\
\mathsf{min}(x,y) &= \text{het minimum van } x \text{ en } y \\
\mathsf{quo}(x,y) &= \text{als } y \neq 0 \text{ dan } \lfloor x/y \rfloor \text{ anders } 0 \\
\mathsf{rem}(x,y) &= \text{als } y \neq 0 \text{ dan } x \text{ mod } y \text{ anders } x \\
\mathsf{divides}(x,y) &= \text{als } y \neq 0 \text{ en } y \mid x \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{even}(x) &= \text{als } x \text{ even is dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{prime}(x) &= \text{als } x \text{ priem is dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{pn}(x) &= \text{het } x\text{-de priemgetal} \\
& \text{(dus } \mathsf{pn}(0) = 2,\ \mathsf{pn}(1) = 3, \text{ etc.)}
\end{aligned}
$$