Berekenbaarheid 2014
Toets 3
12 januari 2015

Voor je verder leest, schrijf je naam, studentnummer en studierichting op het antwoordvel. Er zijn 6 onderdelen die ieder $1\frac{1}{2}$ punt opleveren, 1 punt is gratis. Veel succes!

1. Bereken $z(4)$, waarbij z is gedefinieerd als $z := \textbf{primrec}(c_0^{(0)}, p_2^{(2)})$. Leg vervolgens uit waarom z primitief recursief is, waarbij je *niet* mag gebruiken dat de functies op de achterzijde van dit blaadje primitief recursief zijn.

2. Bereken $A(1, 4)$, waarbij de Ackermannfunctie A is gedefinieerd als:

$$\begin{aligned} A(0,\, y) &= y + 1 \\ A(x+1, 0) &= A(x, 1) \\ A(x+1, y+1) &= A(x, A(x+1, y)) \end{aligned}$$

3. We definiëren de functie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ als $f(y) := A(1, y)$, waarin A de Ackermann-functie uit de vorige opgave is. Schrijf f in de vorm $f = \textbf{primrec}(g, h)$, en geef g en h (ook) als compositie van functies op de achterzijde van dit blaadje.

4. Bereken $w(4)$, waarbij $w : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ is gedefinieerd als:

$$w(x) := \mu p.\big[\,\mathsf{prime}(p) \cdot \prod_{y=p+1}^{p+x} \mathsf{cosg}\big(\mathsf{prime}(y)\big)\,\big]$$

   Zie de achterzijde van dit blaadje voor de eerste twintig priemgetallen.

5. Er geldt $1/7 = 0{,}14285714\ldots$ We definiëren de functie $d : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ als:

$$d(n) := \text{het } n\text{-de cijfer achter de komma van } 1/7$$

   Dus $d(0) = 0$, $d(1) = 1$, $d(2) = 4$, $d(3) = 2$, $d(4) = 8$, $d(5) = 5$, etc. Laat zien dat d primitief recursief is. Je mag hierbij gebruiken dat de functies op de achterzijde van dit blaadje primitief recursief zijn.

6. Geef een functie $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ zodat $k \neq \mathsf{id}$ maar $k \circ k \circ k = \mathsf{id}$.

Primitief recursieve functies

$$\begin{aligned}
\mathsf{id}(x) &= x\\
z(x) &= 0\\
s(x) &= x+1\\
p_i^{(k)}(x_1,\ldots,x_k) &= x_i\\
c_n^{(k)}(x_1,\ldots,x_k) &= n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathsf{pred}(y) &= y \mathbin{\dot-} 1\\
\mathsf{add}(x,y) &= x+y\\
\mathsf{mult}(x,y) &= x\cdot y\\
\mathsf{sub}(x,y) &= x \mathbin{\dot-} y\\
\mathsf{exp}(x,y) &= x^y\\
\mathsf{fact}(x) &= x!\\
\mathsf{sg}(x) &= \text{als } x\neq 0 \text{ dan } 1 \text{ anders } 0\\
\mathsf{cosg}(x) &= \text{als } x\neq 0 \text{ dan } 0 \text{ anders } 1\\
\mathsf{lt}(x,y) &= \text{als } x<y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0\\
\mathsf{gt}(x,y) &= \text{als } x>y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0\\
\mathsf{le}(x,y) &= \text{als } x\leq y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0\\
\mathsf{ge}(x,y) &= \text{als } x\geq y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathsf{eq}(x,y) &= \text{als } x=y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0\\
\mathsf{ne}(x,y) &= \text{als } x\neq y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0\\
\mathsf{max}(x,y) &= \text{het maximum van } x \text{ en } y\\
\mathsf{min}(x,y) &= \text{het minimum van } x \text{ en } y\\
\mathsf{quo}(x,y) &= \text{als } y\neq 0 \text{ dan } \lfloor x/y\rfloor \text{ anders } 0\\
\mathsf{rem}(x,y) &= \text{als } y\neq 0 \text{ dan } x \bmod y \text{ anders } x\\
\mathsf{divides}(x,y) &= \text{als } y\neq 0 \text{ en } y\,|\,x \text{ dan } 1 \text{ anders } 0\\
\mathsf{even}(x) &= \text{als } x \text{ even is dan } 1 \text{ anders } 0\\
\mathsf{prime}(x) &= \text{als } x \text{ priem is dan } 1 \text{ anders } 0\\
\mathsf{pn}(x) &= \text{het } x\text{-de priemgetal}\\
&\ (\text{dus } \mathsf{pn}(0)=2,\ \mathsf{pn}(1)=3, \text{ etc.})
\end{aligned}$$

De eerste twintig priemgetallen

$$2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47,53,59,61,67,71,\ldots$$