

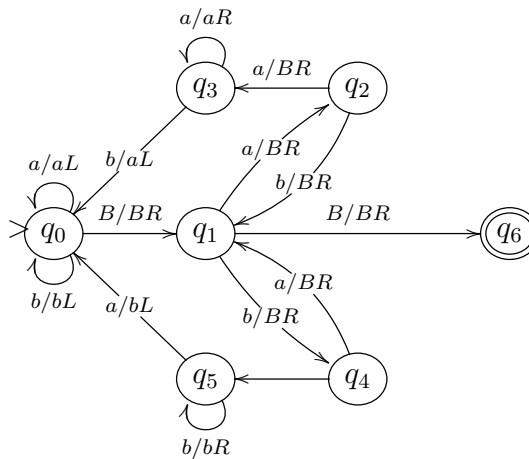
Berekenbaarheid 2014
Uitwerkingen Toets 1
26 november 2014

1. Definieer een standaard (dus één-tape) Turing machine die de taal

$$L_1 := \{u \in \{a, b\}^* \mid u \text{ bevat evenveel } a\text{'s als } b\text{'s}\}$$

accepteert door eindtoestand.

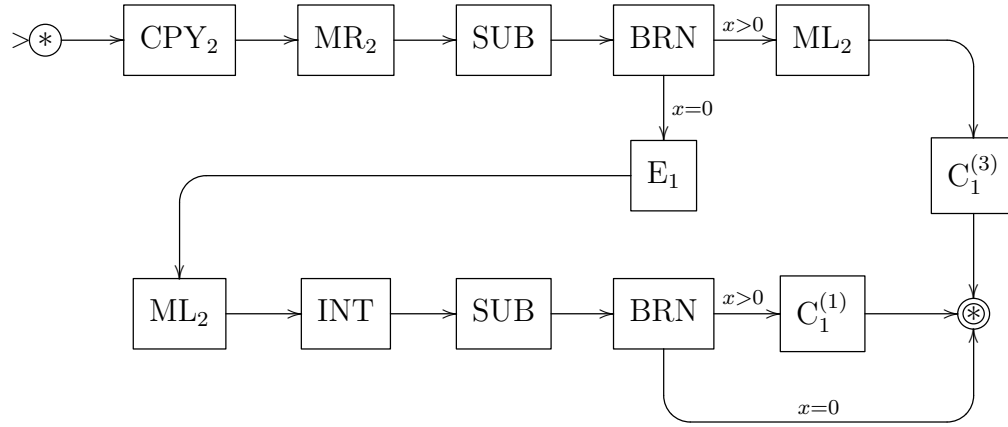
De volgende uitwerking is niet de meest voor de hand liggende, maar heeft de aardige eigenschap dat er geen hulpsymbolen worden gebruikt (wat overigens wel mocht):



2. Definieer een numerieke Turing machine die de functie

$$ne(n, m) := \begin{cases} 1 & \text{als } n \neq m \\ 0 & \text{als } n = m \end{cases}$$

uitrekent. Je mag hierbij gebruik maken van de macro's op de achterkant van dit blaadje.



3. Beschouw de taal

$$L_3 := \{u \in \{a\}^* \mid |u| \text{ is een kwadraat}\}$$

Er geldt bijv. $aaaa \in L_3$ omdat $|aaaa| = 4$ een kwadraat is.

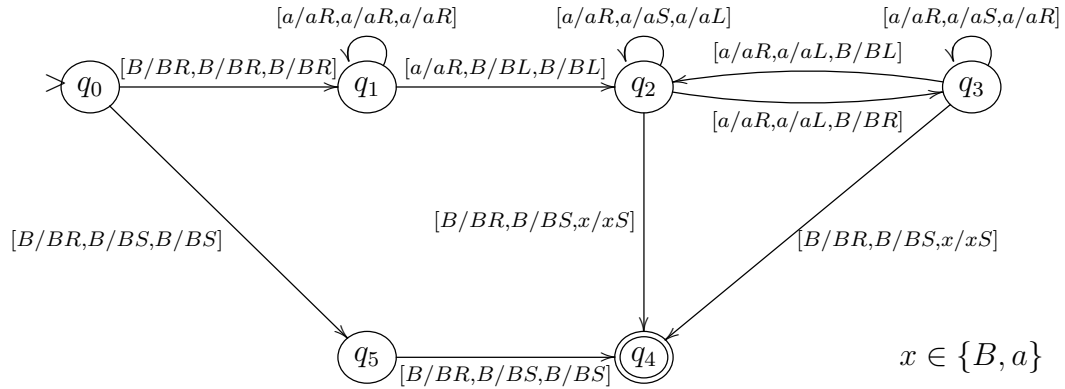
Definieer een non-deterministische drie-tape Turing machine die L_3 herkent door eindtoestand. Je mag bij het definiëren van deze machine *geen* gebruik maken van de macro's op de achterkant van dit blaadje.

Voor deze machine moet gelden dat een input $u \in L_3$ in ten hoogste $2|u| + 4\sqrt{|u|} + 5$ stappen wordt herkend.

[Hint: laat de machine non-deterministisch de wortel van $|u|$ raden.]

De volgende uitwerking is niet de meest voor de hand liggende, maar heeft de aardige eigenschap dat hij het minimale aantal stappen gebruikt, namelijk de lengte van de input plus twee (één extra voor de blank ervoor, en één voor de blank erna), omdat bij iedere transitie de

machine op de eerste tape een stap naar rechts loopt:



Als bij de lus in q_1 non-deterministisch m a 's worden geschreven, dan is het totale aantal stappen dat deze machine nodig heeft om bij q_4 te komen:

$$1 + m + 1 + m(m + 1) + 1 = m^2 + 2m + 3 = (m + 1)^2 + 2$$

Dat betekent dat er in dat geval $(m + 1)^2$ a 's op de tape staan. De transitie naar q_5 is er verder voor om ook het kwadraat van nul, ofwel het lege woord, af te handelen.