Berekenbaarheid 2014
Uitwerkingen Toets 3
12 januari 2015

1. Bereken $z(4)$, waarbij z is gedefinieerd als $z := \textsf{\textbf{primrec}}(c_0^{(0)}, p_2^{(2)})$. Leg vervolgens uit waarom z primitief recursief is, waarbij je *niet* mag gebruiken dat de functies op de achterzijde van dit blaadje primitief recursief zijn.

   De bijbehorende recursievergelijkingen zijn:

   $$z(0) = c_0^{(0)}() = 0$$
   $$z(y+1) = p_2^{(2)}(y, z(y)) = z(y)$$

   We hebben dus:

   $$z(4) = z(3) = z(2) = z(1) = z(0) = 0$$

   Deze functie is primitief recursief, want hij wordt met primitieve recursie uit twee basisfuncties gedefinieerd, en de primitief recursieve functies zijn precies de functies die je kunt maken met:

   - de basisfuncties $c_0^{(0)}, s, p_i^{(k)}$ (voor iedere $i, k \in \mathbb{N}$ met $1 \leq i \leq k$)
   - functiecompositie
   - primitieve recursie

2. Bereken $A(1, 4)$, waarbij de Ackermannfunctie A is gedefinieerd als:

   $$\begin{array}{ll} A(0,\ y) & = y + 1 \\ A(x+1, 0) & = A(x, 1) \\ A(x+1, y+1) & = A(x, A(x+1, y)) \end{array}$$

   We hebben:

   $$A(1, 0) = A(0, 1) = 1 + 1 = 2$$
   $$A(1, y+1) = A(0, A(1, y)) = A(1, y) + 1$$

   Hierdoor geldt:

   $$A(1, 4) = A(1, 3)+1 = A(1, 2)+2 = A(1, 3)+3 = A(1, 0)+4 = 2+4 = 6$$

Meer in zijn algemeenheid geldt (bewijsbaar met inductie):

$$A(1, y) = y + 2$$

3. We definiëren de functie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ als $f(y) := A(1, y)$, waarin A de Ackermann-functie uit de vorige opgave is. Schrijf f in de vorm $f = \textsf{\textbf{primrec}}(g, h)$, en geef g en h (ook) als compositie van functies op de achterzijde van dit blaadje.

   De recursievergelijkingen voor f zijn (zie de vorige opgave):

$$f(0) = 2$$
$$f(y + 1) = f(y) + 1$$

   Als we dit matchen met het recursieschema:

$$f(0) = g()$$
$$f(y + 1) = h(y, f(y))$$

   dan moet er dus gelden:

$$g() = 2$$
$$h(y, f(y)) = f(y) + 1$$

   Dit geldt het simpelst als:

$$g() = 2$$
$$h(y, w) = w + 1$$

   Deze g en h zijn als compositie te schrijven als:

$$g = c_2^{(0)}$$
$$h = s \circ p_2^{(2)}$$

   Samenvattend is deze oplossing dus:

$$f = \textsf{\textbf{primrec}}(c_2^{(0)}, s \circ p_2^{(2)})$$

4. Bereken $w(4)$, waarbij $w : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ is gedefinieerd als:

$$w(x) := \mu p.\big[\,\mathsf{prime}(p) \cdot \prod_{y=p+1}^{p+x} \mathsf{cosg}\big(\mathsf{prime}(y)\big)\,\big]$$

Zie de achterzijde van dit blaadje voor de eerste twintig priemgetallen.

Dit zoekt het kleinste priemgetal p waarvoor geldt dat $p+1, \ldots, p+5$ allemaal niet priem zijn. Het kleinste priemgetaal waar dat voor geldt is 23, want $24, \ldots, 27$ zijn allemaal niet priem. Er geldt dus:

$$w(4) = 23$$

5. Er geldt $1/7 = 0{,}14285714\ldots$ We definiëren de functie $d : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ als:

$$d(n) := \text{het } n\text{-de cijfer achter de komma van } 1/7$$

Dus $d(0) = 0$, $d(1) = 1$, $d(2) = 4$, $d(3) = 2$, $d(4) = 8$, $d(5) = 5$, etc. Laat zien dat d primitief recursief is. Je mag hierbij gebruiken dat de functies op de achterzijde van dit blaadje primitief recursief zijn.

Dit volgt uit het feit dat d te definiëren is als:

$$d(n) = \mathsf{rem}(\mathsf{div}(\mathsf{exp}(10, n), 7), 10)$$

Bijv., als $n = 2$ hebben we:

$$\begin{aligned} \mathsf{exp}(10, 2) &= 100 \\ \mathsf{div}(100, 7) &= \lfloor 14{,}285714\ldots \rfloor = 14 \\ \mathsf{rem}(14, 10) &= 4 = d(2) \end{aligned}$$

6. Geef een functie $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ zodat $k \neq \mathsf{id}$ maar $k \circ k \circ k = \mathsf{id}$.

$$k(x) = \begin{cases} 2 & \text{als } x = 0 \\ 0 & \text{als } x = 1 \\ 1 & \text{als } x = 2 \\ x & \text{als } x \geq 3 \end{cases}$$