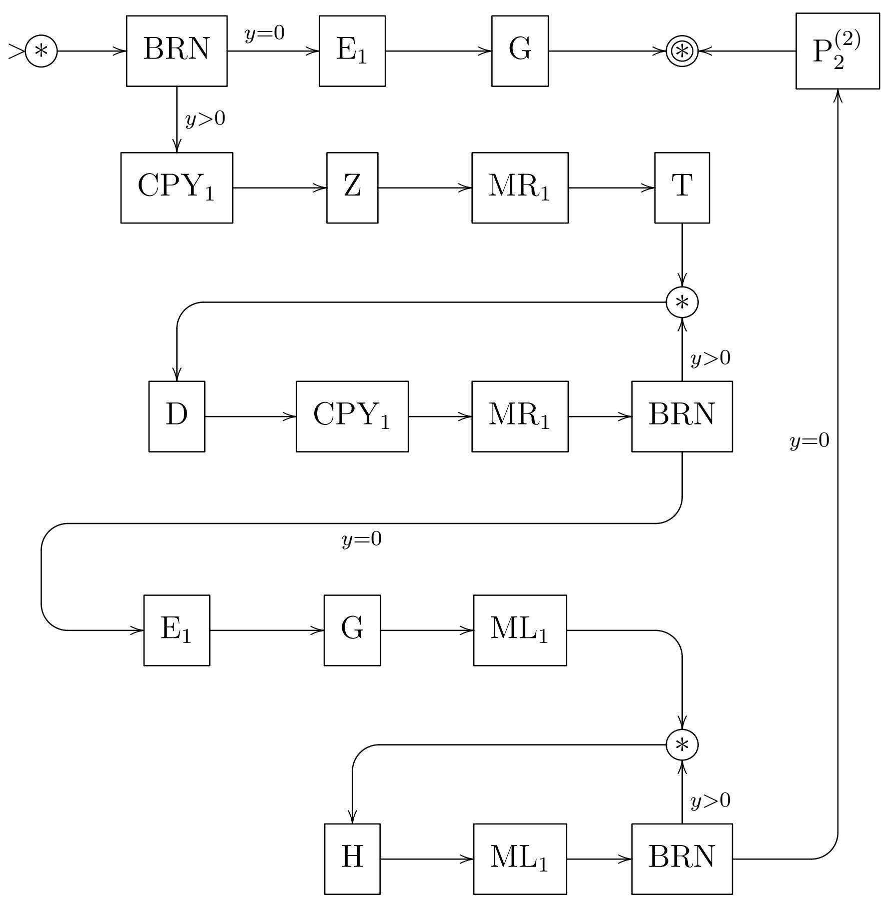
Berekenbaarheid 2014
Uitwerkingen Inhaaltoets
14 januari 2015

1. Een functie f wordt gedefinieerd uit functies g en h met de recursievergelijkingen:

$$f(0) = g()$$
$$f(y+1) = h(y, f(y))$$

Gegeven macros G en H die de functies g en h uitrekenen, definieer een numerieke Turing machine die f uitrekent.

Je mag bij het definiëren van deze machine gebruik maken van de macro's op de achterkant van dit blaadje.



2. Bewijs dat het onbeslisbaar is of er bij een Turing machine een input bestaat waarmee deze Turing machine links van de tape afloopt.

   Je mag gebruiken dat er een Turing machine bestaat die iedere code $R(M)$ omzet in een code $R(M')$ waarbij $L(M') = L(M)$ en waarbij M' voor geen enkele input van de tape afloopt.

   Het blank tape probleem B kan naar dit probleem worden gereduceerd.

   Hiertoe moeten we bij iedere machine M een machine M' maken zodat M stopt op de lege tape precies dan als er een input bestaat waarmee M' van de tape afloopt.

   Maak hiertoe eerst een machine M'' bij M die dezelfde taal herkent als M maar nooit van de tape afloopt (zoals gegeven in de opgave). M stopt dus op de lege tape precies dan als M'' stopt op de lege tape. De machine M' bestaat nu uit drie stappen:

   (a) Wis de input.

   (b) Doe M''.

   (c) Loop links van de tape af.

   Het zal duidelijk zijn dat er precies dan een input bestaat waarmee M' van de tape afloopt als de machine bij de derde stap kan komen (in de eerste twee stappen kan de machine niet van de tape aflopen). Maar dat is precies het geval waarin M'' stopt op de lege tape, ofwel wanneer M stopt op de lege tape.

3. Bestaat er een taal die niet recursief opsombaar is, en waarvan het complement ook niet recursief opsombaar is? Verklaar je antwoord.

   (Hint: maak een taal die voor iedere taal $L(M)$ ongelijk probeert te zijn aan $L(M)$ en aan $\overline{L(M)}$. Gebruik hiervoor bijv. de woorden $0R(M)$ en $1R(M)$.)

   Ja, die bestaat. Als we de hint volgen krijgen we bijv. dat

$$L := \{0R(M) \mid 0R(M) \notin L(M)\} \cup \{1R(M) \mid 1R(M) \in L(M)\}$$

   een taal is die voor iedere M verschilt van $L(M)$ en van $\overline{L(M)}$. Deze taal is dus niet recursief opsombaar, en het complement ook niet.

$\to\boxed{\mathrm{S}}\to$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\quad BB$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n+1}\,B$
$\to\boxed{\mathrm{Z}}\to$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\quad B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{0}\ldots B$
$\to\boxed{\mathrm{E}}\to$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B$	*termineert niet*
$\to\boxed{\mathrm{P}_i^{(k)}}\to$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_i}\;\,B\ldots\quad\ldots B$
$\to\boxed{\mathrm{C}_m^{(k)}}\to$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{m}\;\,B\ldots\quad\ldots B$
$\to\boxed{\mathrm{A}}\to$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B\,\overline{m}\qquad B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n+m}\,BBB$
$\to\boxed{\mathrm{D}}\to$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\qquad\quad B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n\dot{-}1}\ldots B$
$\to\boxed{\mathrm{SUB}}\to$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B\,\overline{m}\quad\; B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n\dot{-}m}\;\ldots B$
$\to\boxed{\mathrm{MULT}}\to$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B\,\overline{m}\,B\ldots$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n\cdot m}\,B\ldots$
$\to\boxed{\mathrm{MR}_k}\to$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B$	$B\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,\underset{\uparrow}{B}$
$\to\boxed{\mathrm{ML}_k}\to$	$B\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,\underset{\uparrow}{B}$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B$
$\to\boxed{\mathrm{FR}}\to$	$\underset{\uparrow}{B}B^i\,\overline{n}\,B\qquad(i\geq 0)$	$B^i\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B$
$\to\boxed{\mathrm{FL}}\to$	$B\,\overline{n}\,B^i\underset{\uparrow}{B}\qquad(i\geq 0)$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B^iB$
$\to\boxed{\mathrm{E}_k}\to$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B$	$\underset{\uparrow}{B}\ldots\qquad\quad\ldots B$
$\to\boxed{\mathrm{T}}\to$	$\underset{\uparrow}{B}B^i\,\overline{n}\,B\qquad(i\geq 0)$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B^iB$
$\to\boxed{\mathrm{INT}}\to$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B\,\overline{m}\,B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{m}\,B\,\overline{n}\,B$
$\to\boxed{\mathrm{CPY}_k}\to$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B\ldots\qquad\quad\ldots B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B$
$\to\boxed{\mathrm{CPY}_{k,i}}\to$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B\,\overline{n_{k+1}}\,B\ldots B\,\overline{n_{k+i}}\,B\ldots\qquad\quad\ldots B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B\,\overline{n_{k+1}}\,B\ldots B\,\overline{n_{k+i}}\,B\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B$
$\to\boxed{\mathrm{BRN}}\xrightarrow{n=0}$, $\downarrow n>0$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B$