Berekenbaarheid 2015
Hertentamen
8 februari 2016

Voor je verder leest, schrijf je naam, studentnummer en studierichting op het antwoordvel. Er zijn 10 opgaven die ieder 9 punten opleveren, de eerste 10 punten zijn gratis, en het cijfer voor het tentamen is het aantal punten gedeeld door 10. Pas op! Sommige opgaven hebben meerdere onderdelen, vergeet er geen!

Turing-machines moeten altijd gegeven worden door middel van een toestandsdiagram met rondjes en pijlen, en dus *niet* als een tabel. In alle Turing-machines mogen hulpsymbolen worden gebruikt.

Veel succes!

1. Definieer een standaard Turing-machine M_1 met alfabet $\Sigma = \{a, b\}$ die in zijn input iedere a vervangt door ab. Er moet dus bijvoorbeeld gelden $M_1(abba) = abbbab$. Zorg er voor dat de output op de juiste plaats op de tape terecht komt, en dat de kop van Turing-machine bij terminatie weer op vakje nul staat.

2. Definieer een niet-deterministische 2-tape Turing-machine M_2 die de taal
$$L_2 = \{u_1 ava u_2 \mid u_1, u_2, v \in \{a, b, c\}^*, v = v^R\}$$
herkent. Er geldt bijvoorbeeld $abbcabcabacbab \in L_2$ (met $u_1 = abbc$, $v = bcabacb$ en $u_2 = b$). Zorg ervoor dat correcte input w wordt herkend in ten hoogste $3 \cdot \mathsf{length}(w) - 1$ stappen.

3. Definieer Turing-machines waarin alle toestanden expliciet zijn gemaakt die de volgende drie macro's implementeren (zie pagina 5 voor een beschrijving van deze macro's):

   (a) BRN

   (b) FR

   (c) E

4. Gegeven de functie f_4, gedefinieerd met primitieve recursie door de recursievergelijkingen:

$$f_4(0) = 3$$
$$f_4(y+1) = 3\, f_4(y) - 3$$

Definieer een numerieke Turing-machine die deze functie berekent. Je mag de macro's op pagina 5 hierbij gebruiken, maar je mag als je wilt ook expliciete toestanden en transities in je machine opnemen.

5. Geef, expliciet als nullen en énen, een code $R(M_5)$ van een Turing-machine M_5 zodat:

$$U(R(M_5)) = M_5(R(M_5))$$

waarbij allebei deze berekeningen normaal termineren. Verklaar je antwoord! Zie voor een relevant citaat uit het boek van Sudkamp pagina 6.

6. Is het beslisbaar of een gegeven Turing-machine M_6 met input de lege tape stopt in precies 2016 stappen? We noemen dit probleem P_6, dus de vraag is of P_6 beslisbaar is. Verklaar je antwoord! Als je denkt dat P_6 niet beslisbaar is, bewijs dan ook de onbeslisbaarheid.

7. Is het beslisbaar of een gegeven Turing-machine M_7 met input de lege tape stopt in een aantal stappen ongelijk aan 2016 stappen? We noemen dit probleem P_7, dus de vraag is of P_7 beslisbaar is. Verklaar je antwoord! Als je denkt dat P_7 niet beslisbaar is, bewijs dan ook de onbeslisbaarheid.

8. (a) Geef totale numerieke functies (dus over de natuurlijke getallen) f_8, g_8 en h_8 zodat

$$f_8 \circ (g_8, h_8) = p_1^{(2)}$$
$$g_8 \circ (f_8, h_8) = p_2^{(2)}$$

   (b) Geef van alle drie deze functies ook de ariteit.

9. Gegeven de functie f_9, gedefinieerd met primitieve recursie door de recursievergelijkingen:

$$f_9(0) = 3$$
$$f_9(y+1) = 3\, f_9(y) - 3$$

(a) Bereken $f_9(5)$. Geef aan hoe je aan je antwoord bent gekomen.

(b) Schrijf f_9 als

$$f_9 = \mathbf{primrec}(g_9, h_9)$$

waarbij g_9 en h_9 geschreven zijn als compositie van de functies op bladzijde 6.

10. De functie f_{10} is gedefinieerd door:

$$f_{10}(x) = \text{het kleinste priemgetal} \geq x$$

Er geldt bijvoorbeeld $f_{10}(1000) = 1009$.

(a) Laat zien dat f_{10} een μ-recursieve functie is.

(b) Is f_{10} ook primitief recursief? Verklaar je antwoord!

Macro's voor Turing-machines voor numerieke berekeningen

Macro	Voor	Na
S	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\quad BB$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n+1}\,B$
Z	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\quad B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{0}\ldots B$
E	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B$	*termineert niet*
$\mathrm{P}_i^{(k)}$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_i}\;B\ldots\quad\ldots B$
$\mathrm{C}_m^{(k)}$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{m}\;B\ldots\quad\ldots B$
A	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B\,\overline{m}\quad B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n+m}\,BB$
D	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\qquad B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n\dot{-}1}\ldots B$
SUB	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B\,\overline{m}\quad B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n\dot{-}m}\ldots B$
MULT	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B\,\overline{m}\,B\ldots$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n\cdot m}\,B\ldots$
MR_k	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B$	$B\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,\underset{\uparrow}{B}$
ML_k	$B\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,\underset{\uparrow}{B}$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B$
FR	$\underset{\uparrow}{B}\,B^i\,\overline{n}\,B \qquad (i\geq 0)$	$B^i\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B$
FL	$B\,\overline{n}\,B^i\underset{\uparrow}{B} \qquad (i\geq 0)$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B^i B$
E_k	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B$	$\underset{\uparrow}{B}\ldots\qquad\ldots B$
T	$\underset{\uparrow}{B}\,B^i\,\overline{n}\,B \qquad (i\geq 0)$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B^i B$
INT	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B\,\overline{m}\,B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{m}\,B\,\overline{n}\,B$
CPY_k	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B\ldots\qquad\ldots B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B$
$\mathrm{CPY}_{k,i}$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B\,\overline{n_{k+1}}\,B\ldots B\,\overline{n_{k+i}}\,B\ldots\qquad\ldots B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B\,\overline{n_{k+1}}\,B\ldots B\,\overline{n_{k+i}}\,B\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B$
BRN ($n=0$ →; $n>0$ ↓)	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B$

Codering van transities

Symbol	Encoding
0	1
1	11
B	111
q_0	1
q_1	11
$\vdots$	$\vdots$
q_n	1^{n+1}
L	1
R	11

Let $en(x)$ denote the encoding of a symbol x. A transition $\delta(q_i, x) = [q_j, y, d]$ is encoded by the string

$$en(q_i)0en(x)0en(q_j)0en(y)0en(d).$$

Primitief recursieve functies

$$\begin{aligned}
\mathsf{id}(x) &= x \\
z(x) &= 0 \\
s(x) &= x + 1 \\
p_i^{(k)}(x_1, \ldots, x_k) &= x_i \\
c_n^{(k)}(x_1, \ldots, x_k) &= n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathsf{pred}(y) &= y \dot{-} 1 \\
\mathsf{add}(x, y) &= x + y \\
\mathsf{mult}(x, y) &= x \cdot y \\
\mathsf{sub}(x, y) &= x \dot{-} y \\
\mathsf{exp}(x, y) &= x^y \\
\mathsf{fact}(x) &= x! \\
\mathsf{sg}(x) &= \text{als } x \neq 0 \text{ dan 1 anders 0} \\
\mathsf{cosg}(x) &= \text{als } x \neq 0 \text{ dan 0 anders 1} \\
\mathsf{lt}(x, y) &= \text{als } x < y \text{ dan 1 anders 0} \\
\mathsf{gt}(x, y) &= \text{als } x > y \text{ dan 1 anders 0} \\
\mathsf{le}(x, y) &= \text{als } x \leq y \text{ dan 1 anders 0} \\
\mathsf{ge}(x, y) &= \text{als } x \geq y \text{ dan 1 anders 0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathsf{eq}(x, y) &= \text{als } x = y \text{ dan 1 anders 0} \\
\mathsf{ne}(x, y) &= \text{als } x \neq y \text{ dan 1 anders 0} \\
\mathsf{max}(x, y) &= \text{het maximum van } x \text{ en } y \\
\mathsf{min}(x, y) &= \text{het minimum van } x \text{ en } y \\
\mathsf{quo}(x, y) &= \text{als } y \neq 0 \text{ dan } \lfloor x/y \rfloor \text{ anders 0} \\
\mathsf{rem}(x, y) &= \text{als } y \neq 0 \text{ dan } x \bmod y \text{ anders } x \\
\mathsf{divides}(x, y) &= \text{als } y \neq 0 \text{ en } y \,|\, x \text{ dan 1 anders 0} \\
\mathsf{even}(x) &= \text{als } x \text{ even is dan 1 anders 0} \\
\mathsf{prime}(x) &= \text{als } x \text{ priem is dan 1 anders 0} \\
\mathsf{pn}(x) &= \text{het } x\text{-de priemgetal} \\
&\quad (\text{dus } \mathsf{pn}(0) = 2,\ \mathsf{pn}(1) = 3, \text{ etc.})
\end{aligned}$$