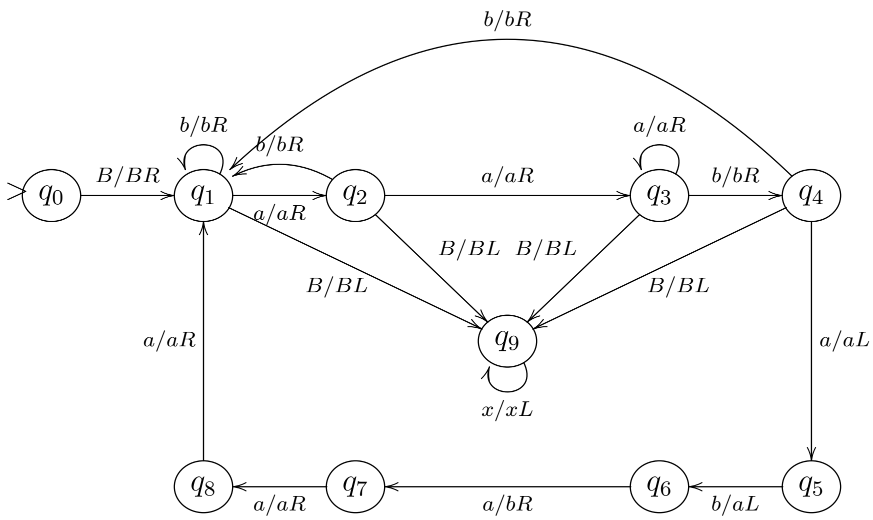
Berekenbaarheid 2015
Uitwerkingen Toets 1
18 september 2015

1. Definieer een standaard Turing-machine M_1 met input alfabet $\Sigma = \{a, b\}$ die in zijn input van links naar rechts iedere $aaba$ vervangt door $abaa$. Er moet dus bijvoorbeeld gelden dat $M_1(a\underline{aaba}ab\underline{aaba}) = a\underline{abaa}ab\underline{abaa}$. Zorg er voor dat de lees-/schrijfkop van de machine bij terminatie weer op vakje 0 van de tape staat. ($2\frac{1}{2}$ punten)

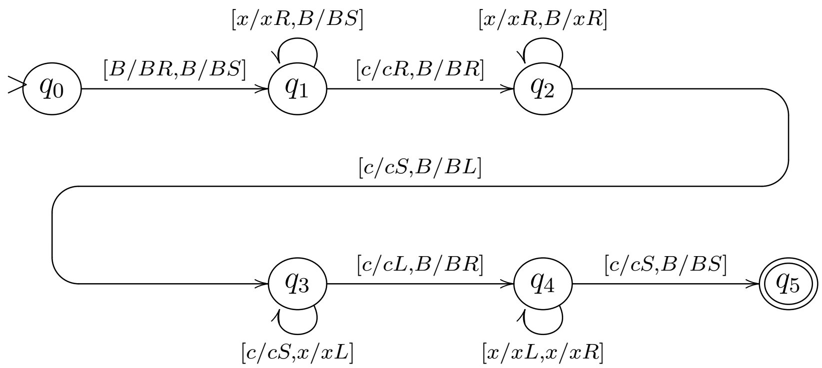


$x \in \{a, b\}$

2. Definieer een non-deterministische 2-tape Turing-machine M_2 die de taal ($2\frac{1}{2}$ punten)

$$L(M_2) = \{ucvcw \mid u, v, w \in \{a, b, c\}^* \text{ en } v = v^R\}$$

Hierin betekent v^R het woord v achterstevoren gezet, dus v moet een palindroom zijn. Zorg ervoor dat een correcte input van lengte n in ten hoogste $3n + 6$ stappen wordt herkend.



$x \in \{a, b, c\}$

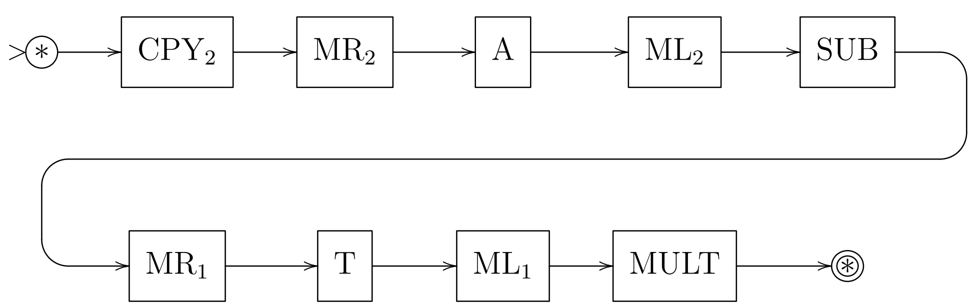
Deze machine doet $|u| + 3|v| + 5$ stappen, met $n = |u| + |v| + |w| + 2$. Nu is $|u| + 3|v| + 5 < 3|u| + 3|v| + 3|w| + 6 - 1 = 3n - 1$, dus het aantal stappen is kleiner dan $3n - 1$ en dat is kleiner dan $3n + 6$.

Er is ook een oplossing die ten hoogste $n + 1$ stappen kost, door non-deterministisch het midden van v te zoeken, maar die hebben we hier niet verder uitgewerkt.

3. Definieer een numerieke Turing-machine die de functie (2 punten)

$$f_3(n, m) = (n + m) \cdot (n \dot{-} m)$$

uitrekent. Je mag de macro's op de achterkant van dit blaadje gebruiken.



4. Laat zien dat iedere recursief opsombare taal ook herkend wordt door een standaard Turing-machine waarbij de enige transitie vanuit q_0 van de vorm $\delta(q_0, B) = [q_i, B, R]$ is (voor een zekere $q_i \in Q$), en waarbij (2 punten)

er geen enkele transitie náár q_0 toe gaat, dus waarbij er geen $q_j \in Q$, $x, y \in \Gamma$ en $d \in \{L, R\}$ bestaan met $\delta(q_j, x) = [q_0, y, d]$.

De kort-door-de-bocht uitwerking:

Vervang

$$\to (q_0)$$

door

$$\to (q_{-2}) \xrightarrow{B/BR} (q_{-1}) \xrightarrow{x/xL} (q_0)$$

met $x \in \Gamma$.

De nette, wiskundige uitwerking:

De definitie van een recursief opsombare taal is een taal waarbij er een Turing-machine M bestaat die die taal herkend. Laat

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$$

zo'n machine voor de gegeven taal zijn. We gaan hieruit een M' definiëren die dezelfde taal herkent, en die aan de gevraagde eigenschappen voldoet. Neem hiervoor

$$M' = (Q', \Sigma, \Gamma, \delta', q_{-2}, F)$$

met

$$Q' = Q \cup \{q_{-2}, q_{-1}\}$$

waarbij q_{-2} en q_{-1} nieuwe toestanden zijn die nog niet in Q voorkwamen. De partiële functie δ' is dan gedefinieerd door:

$$\begin{array}{lll}
\delta'(q_{-2}, B) & = [q_{-1}, B, R] & \\
\delta'(q_{-2}, x) & \uparrow & \text{voor } x \in \Gamma - \{B\} \\
\delta'(q_{-1}, x) & = [q_0, x, L] & \text{voor } x \in \Gamma \\
\delta'(q_i, x) & = \delta(q_i, x) & \text{voor } q_i \in Q \text{ en } x \in \Gamma
\end{array}$$