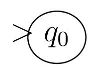
Berekenbaarheid 2015
Uitwerkingen Toets 2
6 oktober 2015

1. Gegeven dat U een universele Turing-machine is zoals op het college is behandeld, dus waarbij de output van U de output van de gesimuleerde machine is. Geef expliciet een woord $w_1 \in \{0,1\}^*$ met $U(w_1) = 101$, en leg uit waarom dit zo is. ($2\frac{1}{2}$ punten)

   Zie de achterkant van dit blaadje voor een relevant citaat uit het boek van Sudkamp over codes van Turing-machines.

   We hebben $U(R(M)w) = M(w)$ voor alle M en w. Om als output van de universele machine 101 te krijgen hebben we dus een machine M en input w nodig zodat $M(w) = 101$.

   Neem als machine:

   M_1 :
   

   met code $R(M_1) = 000000$. Bij deze machine is de output gelijk aan de input, en dus $M_1(101) = 101$. Dus uit:

   $$w_1 = R(M_1)101 = 000000101$$

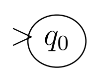
   volgt dan dat:

   $$U(w_1) = U(R(M_1)101) = M_1(101) = 101$$

2. Het probleem H_M is het halting probleem voor een specifieke Turing-machine M. Hierbij is de input van het probleem dus niet $R(M)w$, maar alleen de input w, en de vraag is of de vaste machine M stopt met input w. ($2\frac{1}{2}$ punten)

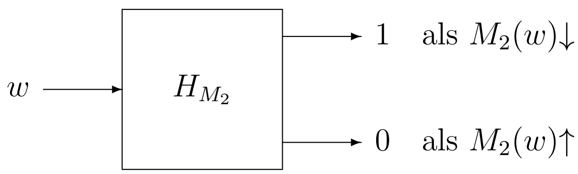
   Geef een machine M_2 waarvoor dit probleem H_{M_2} beslisbaar is, leg uit waarom dit zo is, en geef een Turing-machine die dit probleem beslist.

   Neem:

   M_2 :
   

   Deze machine stopt voor iedere input, dus het antwoord op de vraag van het probleem H_{M_2} of $M_2(w)$ stopt voor gegeven input w is altijd 'ja'. Dit is duidelijk beslisbaar.

   Een machine die dit probleem beslist heeft als specificatie



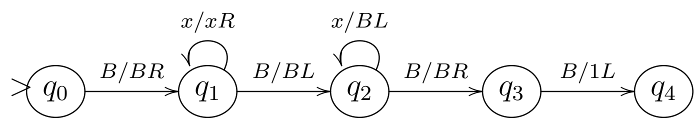
en moet dus voor iedere input een 1 als output geven, omdat M_2 voor iedere input stopt. Deze machine is in woorden:

(a) wis input

(b) schrijf 1 op de tape

of uitgewerkt als toestandsdiagram:

H_{M_2} :



Hierin is $x \in \{0, 1\}$.

3. Geef een machine M_3 waarbij het probleem H_{M_3} zoals beschreven in de vorige opgave *on*beslisbaar is, en bewijs deze onbeslisbaarheid. (2 punten)

(Hint: denk aan één van de opgaven van het werkcollege!)

Dit probleem is onbeslisbaar voor de universele Turing-machine (dat was de opgave van het werkcollege), dus de oplossing is $M_3 = U$.

We reduceren het blank tape probleem B naar H_U. We willen dus bij iedere M een w construeren zodat

$$M(\lambda)\downarrow \iff w \text{ voldoet aan } H_U$$

Deze w moet natuurlijk iets met een machine M' te maken hebben. Het ligt voor de hand te nemen $w = R(M')$. Evenwel

$$R(M') \text{ voldoet aan } H_U \iff U(R(M'))\downarrow \iff M'(\lambda)\downarrow$$

want $U(R(M')) = U(R(M')\lambda) = M'(\lambda)$. Dus we kunnen gewoon $M' = M$ nemen en dus $w = R(M)$.

Dus stel dat H_U beslisbaar was, dan konden we daarmee B oplossen, en was B ook beslisbaar. Maar B is onbeslisbaar, en daarom is H_U ook onbeslisbaar.

4. Het probleem H_w is het halting probleem voor een specifieke input w. Hierbij is de input van het probleem dus niet $R(M)w$, maar alleen de code van de machine $R(M)$, en de vraag is of M stopt met vaste input w. Zo is bijvoorbeeld het probleem H_λ het blank tape probleem B. (2 punten)

Laat zien dat H_w onbeslisbaar is voor ieder woord $w \in \{0,1\}^*$.

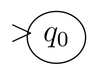
De vraag '$M(w)\downarrow$?' is equivalent aan '$w \in L(M)$?' Dus dit probleem valt onder de stelling van Rice.

Hiervoor moeten we nog wel laten zien dat het probleem H_w niet-triviaal is.

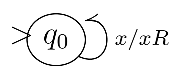
Neem M_{ja} en M_{nee} met $L(M_{\text{ja}}) = \Sigma^*$ en $L(M_{\text{nee}}) = \emptyset$. Er geldt duidelijk dat $w \in L(M_{\text{ja}})$ en $w \notin L(M_{\text{nee}})$, dus is het probleem niet-triviaal.

Expliciete M_{ja} en M_{nee} zijn:

M_{ja}



M_{nee}



Hierin is $x \in \Gamma$.