Berekenbaarheid 2015
Uitwerkingen Toets 3
20 oktober 2015

1. We definiëren: ($2\frac{1}{2}$ punten)

$$f_1 := \mathsf{add} \circ (\mathsf{exp}, \mathsf{exp} \circ (p_2^{(2)}, p_1^{(2)}))$$

Bereken de waarde van $f_1(2,3)$ en leg uit hoe je aan dit antwoord bent gekomen.

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &= \mathsf{add}(\mathsf{exp}(x,y), \mathsf{exp}(p_2^{(2)}(x,y), p_1^{(2)}(x,y))) \\ &= \mathsf{add}(\mathsf{exp}(x,y), \mathsf{exp}(y,x)) \\ &= x^y + y^x \end{aligned}$$

dus

$$f_1(2,3) = 2^3 + 3^2 = 8 + 9 = 17$$

2. Laat *direct uit de definitie van primitief recursieve functies* zien dat de vermenigvuldiginsfunctie mult primitief recursief is. Je mag hierbij de nulfunctie z als een basisfunctie beschouwen. Schrijf mult ook in een vorm: ($2\frac{1}{2}$ punten)

$$\mathsf{mult} = \ldots$$

(Hint: laat eerst zien dat add primitief recursief is. Bepaal bij iedere primitief recursieve definitie het recursieschema en de functies g en h.)

$$\mathsf{mult} = \mathbf{primrec}(c_0^{(0)} \circ (), \mathbf{primrec}(p_1^{(1)}, s \circ p_3^{(3)}) \circ (p_3^{(3)}, p_1^{(3)}))$$

(Tussen de lege haakjes staan nul functies van ariteit 1.)

Hier wordt mult met compositie en primitieve recursie uit de basisfuncties $c_0^{(0)}$, s, $p_1^{(1)}$, $p_1^{(3)}$ en $p_3^{(3)}$ gedefinieerd. De definitie van primitief recursieve functies is dat dat precies die functies zijn die met compositie en primitieve recursie uit basisfuncties kunnen worden gemaakt. Dus is mult een primitief recursieve functie.

Extra uitleg die niet nodig was voor een goed antwoord:

De recursieve definitie van add heeft recursieschema:

$$\begin{aligned} \mathsf{add}(x,0) &= x & &= g(x) \\ \mathsf{add}(x,y+1) &= s(\mathsf{add}(x,y)) & &= h(x,y,\mathsf{add}(x,y)) \end{aligned}$$

Dus hebben we

$$\begin{aligned} g(x) &= x \\ h(x,y,w) &= s(w) \end{aligned}$$

En dus

$$\begin{aligned} g &= p_1^{(1)} \\ h &= s \circ p_3^{(3)} \end{aligned}$$

En dus

$$\mathsf{add} = \textbf{primrec}(p_1^{(1)}, s \circ p_3^{(3)})$$

De recursieve definitie van mult heeft recursieschema:

$$\begin{aligned} \mathsf{mult}(x,0) &= 0 & &= g(x) \\ \mathsf{mult}(x,y+1) &= \mathsf{mult}(x,y) + x & &= h(x,y,\mathsf{mult}(x,y)) \end{aligned}$$

Dus hebben we

$$\begin{aligned} g(x) &= 0 \\ h(x,y,w) &= w + x \end{aligned}$$

En dus

$$\begin{aligned} g &= z = c_0^{(1)} = c_0^{(0)} \circ () \\ h &= \mathsf{add} \circ (p_3^{(3)}, p_1^{(3)}) \end{aligned}$$

En dus

$$\mathsf{mult} = \textbf{primrec}(z, \mathsf{add} \circ (p_3^{(3)}, p_1^{(3)}))$$

3. Een getal heet *perfect* als het de som is van zijn delers behalve zichzelf. (2 punten) De eerste twee perfecte getallen zijn 6 en 28 want $6 = 1 + 2 + 3$ en $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$. We definiëren de functie $\mathsf{isperfect}$ door:

$$\mathsf{isperfect}(x) = \begin{cases} 1 & \text{als } x \text{ een perfect getal is} \\ 0 & \text{als } x \text{ geen perfect getal is} \end{cases}$$

Laat zien dat $\mathsf{isperfect}$ een primitief recursieve functie is.

De functie $\mathsf{isperfect}$ is te definiëren als:

$$\mathsf{isperfect}(x) = \mathsf{eq}\Big(x, \sum_{d=0}^{x \dot{-} 1} d \cdot \mathsf{divides}(x, d)\Big) \cdot \mathsf{sg}(x)$$

en uit die schrijfwijze blijkt direct dat de functie primitief recursief is.

4. We definiëren $\mathsf{perfect}(x)$ als het x-de perfecte getal, tellend vanaf nul, dus $\mathsf{perfect}(0) = 6$ en $\mathsf{perfect}(1) = 28$. Als er maar eindig veel perfecte getallen bestaan (het is onbekend of dat zo is), dan is $\mathsf{perfect}(x)$ voor te grote x ongedefinieerd. (2 punten)

   Laat zien dat $\mathsf{perfect}$ een μ-recursieve functie is. Je mag gebruiken dat de functie $\mathsf{isperfect}$ uit de vorige opgave primitief recursief is.

   De functie $\mathsf{perfect}$ is te definiëren als:

$$\mathsf{perfect}(x) = \mu y.\ \mathsf{eq}\Big(s(x), \sum_{n=0}^{y} \mathsf{isperfect}(n)\Big)$$

   en uit die schrijfwijze blijkt direct dat de functie μ-recursief is.